

Capitolo 5:

Macchine di Turing e calcolabilità secondo

Turing

## Macchina di Turing (*MDT*)

Un dispositivo che accede a un *nastro* (potenzialmente) illimitato diviso in *celle* contenenti ciascuna un simbolo di un *alfabeto*  $\Gamma$  fissato, piú il carattere  $\blank$  (cella vuota).

La *MDT* opera sul nastro con una testina: può leggere o scrivere un carattere dell'alfabeto  $\Gamma$  in una cella, spostarsi a destra o sinistra.

In ogni istante la macchina si trova in uno *stato* appartenente ad un insieme finito  $Q$ , e la computazione evolve attraverso la *funzione di transizione*  $\delta$ :

stato corrente + contenuto della cella su cui è la testina  $\implies$   
nuovo stato + carattere da scrivere + spostamento.

**Definizione 1** *Una macchina di Turing deterministica (MDT) é una sestupla  $\mathcal{M} = \langle \Gamma, \flat, Q, q_0, F, \delta \rangle$ , dove:*

*$\Gamma$  é l'alfabeto dei simboli di nastro*

*$\flat \notin \Gamma$  é il carattere speciale di cella vuota*

*$Q$  é un insieme non vuoto e finito di stati*

*$q_0 \in Q$  é lo stato iniziale*

*$F \subseteq Q$  é l'insieme degli stati finali*

*$\delta$  é la funzione di transizione, definita come*

$$\delta : (Q - F) \times (\Gamma \cup \{\flat\}) \mapsto Q \times (\Gamma \cup \{\flat\}) \times \{d, s, i\}$$

Convenzione:  $\bar{\Gamma}$  indicherà l'insieme  $\Gamma \cup \{\flat\}$ .

## Configurazioni e transizioni di una *MDT*

Una *configurazione istantanea* di una *MDT* é l'insieme del contenuto del nastro, della posizione della testina, e dello stato corrente.

**Definizione 2** *Una configurazione istantanea di una MDT*

$\mathcal{M} = \langle \Gamma, \beta, Q, q_0, F, \delta \rangle$  é una stringa  $c = xqy$ , dove:

1.  $x \in \Gamma\bar{\Gamma}^* \cup \{\varepsilon\}$  (da ora in poi,  $\mathcal{L}_\Gamma$ )
2.  $q \in Q$
3.  $y \in \bar{\Gamma}^*\Gamma \cup \{\beta\}$  (da ora in poi,  $\mathcal{R}_\Gamma$ )

In  $xqy$ ,  $xy$  rappresenta il contenuto della sezione non vuota del nastro;  $q$  é lo stato attuale; la testina é sul primo carattere di  $y$ .

La configurazione *iniziale* di una *MDT* prevede che:

- ✓ lo stato iniziale sia  $q_0$
- ✓ il nastro contenga l'input  $x$  su  $|x|$  celle contigue (le altre vuote)
- ✓ la testina sia posizionata sul primo carattere di  $x$ .

La configurazione *finale* di una *MDT* prevede che lo stato della macchina sia uno stato finale.

**Definizione 3** Una configurazione  $c = xqy$  si dice iniziale se  $x = \varepsilon$ ,  $q = q_0$ ,  $y \in \Gamma^+ \cup \{\#\}$

**Definizione 4** Una configurazione  $c = xqy$  si dice finale se  $q \in F$ .

**Funzione di transizione:** data una configurazione  $c$ , un'applicazione di  $\delta$  produce una configurazione  $c'$  ( $c \vdash_{\mathcal{M}} c'$ ) come segue:

$$1. \ c = xqay, \text{ con } x \in \mathcal{L}_{\Gamma}, y \in \bar{\Gamma}^*\Gamma, a \in \bar{\Gamma}, \text{ e} \\ \delta(q, a) = (q', a', d) \implies c' = xa'q'y;$$

$$2. \ c = xqa, \text{ con } x \in \mathcal{L}_{\Gamma}, a \in \bar{\Gamma}, \text{ e} \\ \delta(q, a) = (q', a', d) \implies c' = xa'q' \beta;$$

$$3. \ c = xaqby, \text{ con } xa \in \Gamma\bar{\Gamma}^*, y \in \bar{\Gamma}^*\bar{\Gamma} \cup \{\varepsilon\}, b \in \bar{\Gamma} \text{ e} \\ \delta(q, b) = (q', b', s) \implies c' = xq'ab'y;$$

$$4. \ c = qby, \text{ con } y \in \bar{\Gamma}^*\Gamma \cup \{\varepsilon\}, b \in \bar{\Gamma}, \text{ e} \\ \delta(q, b) = (q', b', s) \implies c' = q' \beta b'y;$$

$$5. \ c = xqay, \text{ con } x \in \mathcal{L}_{\Gamma}, y \in \bar{\Gamma}^*\Gamma \cup \{\varepsilon\}, a \in \bar{\Gamma}, \text{ e} \\ \delta(q, a) = (q', a', i) \implies c' = xq'a'y;$$