Forniamo tre proprietà sugli insiemi ricorsivi:

Teorema 27 *Un insieme $S \subseteq \mathbb{N}$ è ricorsivo sse è decidibile.*

Teorema 28 *Se un insieme A è ricorsivo allora l'insieme complemento $\overline{A} = \mathbb{N} - A$ è ricorsivo.*

Teorema 29 *Se insiemi A e B sono ricorsivi allora gli insiemi $A \cap B$ e $A \cup B$ sono ricorsivi.*

Teorema 30 *Sia dato un insieme $S \subseteq \mathbb{N}$; sono equivalenti:*
1. S è ricorsivamente enumerabile;
2. S è semidecidibile;
3. S è il dominio di una funzione g_S parziale calcolabile;
4. S è l'immagine di una funzione h_S parziale calcolabile.

Sapendo che:
(i) gli insiemi ricorsivi sono decidibili, e
(ii) la classe degli insiemi decidibili $\subset$ quella dei semidecidibili
dal precedente teorema possiamo concludere che ogni insieme ricorsivo è anche r.e., ed esistono insiemi r.e., ma non ricorsivi.

Esempio 31 *L'insieme $K = \{x | \varphi_x(x)$ è definita$\}$ non è ricorsivo, ma è r.e. Infatti $K = dom(\psi)$, dove:*

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varphi_x(x) \text{ è definita,} \\ \text{indefinita} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrazione.
$1 \to 2$.
Per ipotesi:
$S = \emptyset$, l'implicazione è banalmente vera
oppure
esiste $f_S : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ che lo enumera. Possiamo definire una MT $\mathcal{M}$ che opera così: dato un input x $\mathcal{M}$ calcola $f_S(0), f_S(1), f_S(2), \ldots$ verificando ogni volta se il risultato coincide con x. Solo quando genera un $y \in \mathbb{N}$ tale che $f_S(y) = x$ accetta x.

$2 \to 3$.
Sia $\mathcal{M}$ la MT che accetta S. Possiamo definire la funzione

$$g_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathcal{M} \text{ accetta } x, \\ indefinito & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione parziale g_S è chiaramente calcolabile e $dom(g_S) = S$.

$3 \to 4$.
Sia g_S parziale calcolabile con $dom(g_S) = S$. Possiamo definire la funzione

$$h_S(x) = \begin{cases} x & \text{se } g_S(x) = 1, \\ indefinito & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione parziale h_S è chiaramente calcolabile e $imm(h_S) = S$.

$4 \to 1$.
Per ipotesi:
$S = \emptyset$, l'implicazione è banalmente vera
oppure
esiste una MT $\mathcal{M}_\mathcal{S}$ che calcola la funzione parziale h_S avente per immagine S. Definiamo una MT $\mathcal{M}$ che opera per fasi.
Fase i-esima ($i > 0$). $\mathcal{M}$ simula i passi delle computazioni effettuate da $\mathcal{M}_\mathcal{S}$ sugli input $0, \ldots, i-1$. Per ogni computazione che termina (in al più i passi) restituendo un valore $y \in imm(h_S)$, $\mathcal{M}$ restituisce lo stesso valore y.
Possiamo definire la funzione f_S che enumera S nel modo seguente:
$f_S(x) = y$ se y è l'$(x+1)$-esimo valore restituito da $\mathcal{M}$.
Chiaramente f_S è totale calcolabile e $imm(f_S) = S$.

Teorema 32 *L'insieme $T = \{x | \varphi_x$ è totale$\}$ non è ricorsivamente enumerabile*

Dimostrazione. Se lo fosse, avremmo una funzione enumeratrice f che è ricorsiva totale. Allora potremmo definire la funzione totale:
$h(x) = \varphi_{f(x)}(x) + 1$
Sia $\bar{y}$ un suo indice. Per la totalità di h deve essere $\bar{y} \in T$, cioè deve esistere $\bar{x}$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{y}$. Ma
$h(\bar{x}) = \varphi_{\bar{y}}(\bar{x})$ poiché $\bar{y}$ è l'indice di h, e inoltre
$h(\bar{x}) = \varphi_{\bar{y}}(\bar{x}) + 1$ per definizione.
Contraddizione!

La classe degli insiemi non ricorsivamente enumerabili corrisponde alla "quasi totalità" della classe degli insiemi di interi, che è di cardinalità $2^{\mathbb{N}}$. Infatti, la classe delle funzioni ricorsive parziali ha cardinalità $\mathbb{N}$ e le funzioni ricorsive totali sono ancora meno.

Teorema 33 *Se insiemi A e B sono ricorsivamente enumerabili allora gli insiemi $A \cap B$ e $A \cup B$ sono ricorsivamente enumerabili.*

Teorema 34 *Se un insieme A è ricorsivamente enumerabile e se l'insieme complemento $\overline{A} = \mathbb{N} - A$ è ricorsivamente enumerabile, allora A è ricorsivo.*

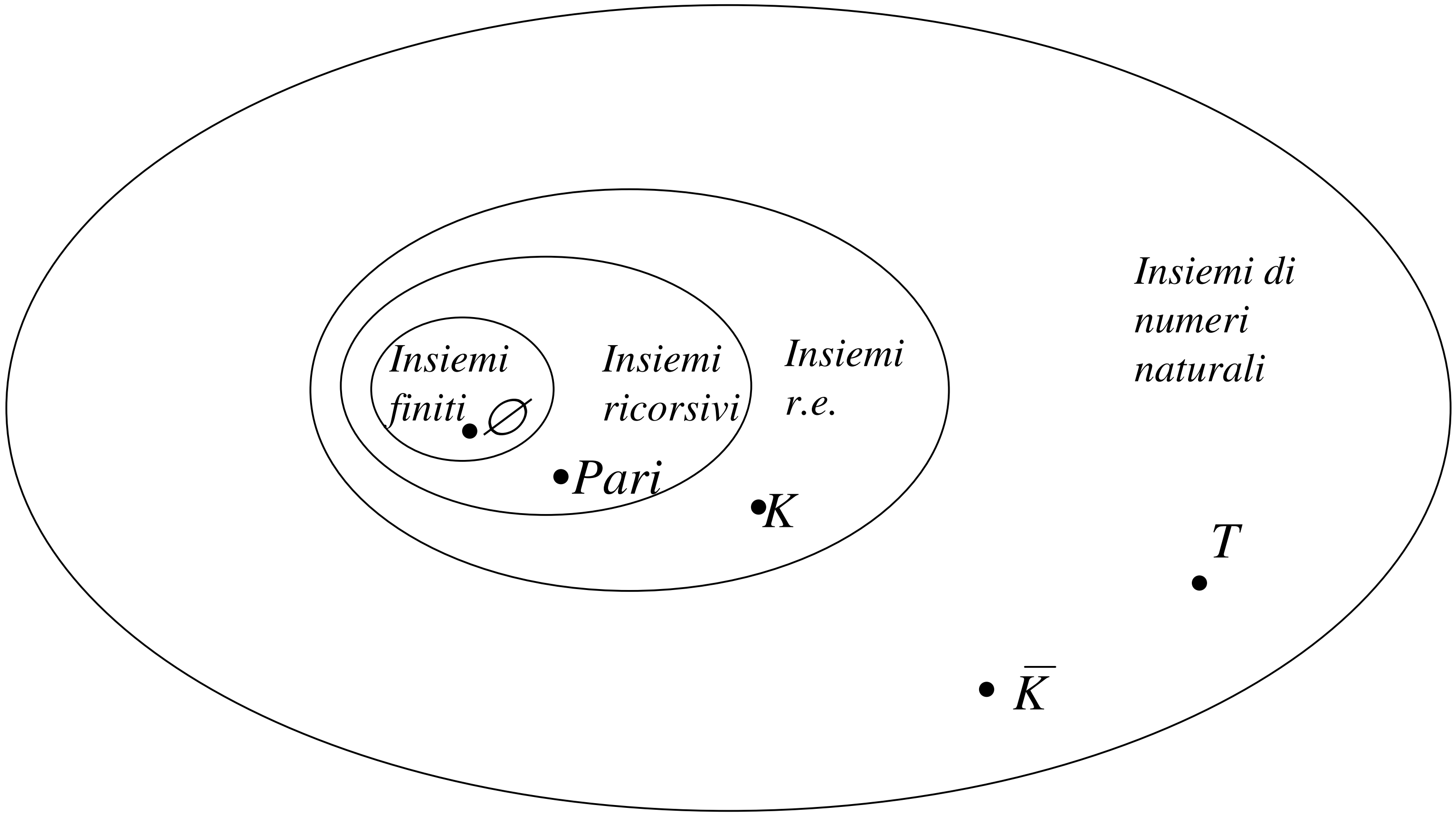
Come conseguenza di questo teorema, se un insieme è r.e., ma non ricorsivo, allora il suo complemento non è r.e.
Questo significa che il complemento di un insieme r.e., ma non ricorsivo, ha delle proprietà di indecidibilità maggiori dell'insieme stesso.

Dimostrazione. Sia $A = dom(\psi_A)$ e $\bar{A} = dom(\psi_{\bar{A}})$ possiamo definire la funzione caratteristica di A:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \psi_A(x) \text{ è definita,} \\ 0 & \text{se } \psi_{\bar{A}}(x) \text{ è definita} \end{cases}$$

Poiché una delle due alternative si verifica sicuramente, f_A è ricorsiva totale.

Diagramma di inclusione



Esempio 35 *L'insieme $\overline{K} = \{y|\varphi_y(y)$ non è definita$\}$ non è r.e. Infatti K è semidecidibile, e quindi r.e.; ma K non è ricorsivo, e quindi $\overline{K}$ non può essere r.e.*

Per verificare se "x appartiene a K" dobbiamo verificare se esiste y tale che $\varphi_x(x)$ si arresta in meno di y passi.
Per verificare se "x appartiene a $\overline{K}$" dobbiamo verificare se per ogni y,$\varphi_x(x)$ richiede più di y passi.

✓I predicati "$\varphi_x(x)$ richiede meno di y passi" e "$\varphi_x(x)$ richiede più di y passi" sono entrambi decidibili.
✓Il predicato "esiste y tale che $\varphi_x(x)$ richiede meno di y passi" è ricorsivamente enumerabile.
✓Il predicato "per ogni y $\varphi_x(x)$ richiede più di y passi" non è r.e.

Il fenomeno vale in generale:

Teorema 36 *Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ non vuoto. A è ricorsivamente enumerabile sse esiste un insieme ricorsivo $B \subseteq \mathbb{N}^2$ tale che $x \in A$ sse $\exists y[(x,y) \in B]$.*

Dimostrazione.
($\Rightarrow$) f è la funzione che enumera A. Sia $B = \{x, y|f(y) = x\}$. B è ricorsivo perché f è totale.
($\Leftarrow$) $B \subseteq \mathbb{N}^2$ è ricorsivo con funzione caratteristica f_B. Allora $A = dom(g_A)$ dove g_A è definita come:

$$g_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se esiste } y \text{ tale che } f_B(x,y) = 1, \\ indefinita & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Teorema 37 *Sia* $A \subseteq \mathbb{N}$. A *è il complemento di un insieme ricorsivamente enumerabile sse esiste un insieme ricorsivo* $B \subseteq \mathbb{N}^2$ *tale che* $x \in A$ *sse* $\forall y[(x,y) \in B]$.

Quindi un predicato $P(x)$ è ricorsivo se può se e solo se può essere descritto equivalentemente come:
$\exists y Q(x,Y)$ e
$\forall y R(x,y)$
dove Q e R sono predicati ricorsivi.

Gli ultimi due risultati possono essere estesi al caso in cui siano usati più quantificatori esistenziali ed universali alternati.

Definizione 38 *Per ogni insieme* $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \in \Sigma_k$ *se esiste un predicato ricorsivo* $P(x, y_1, \ldots, y_k)$ *tale che*

$$x \in A \text{ sse } \exists y_1 \forall y_2 \ldots Q y_k P(x, y_1, \ldots, y_k),$$

dove $Q = \exists$ *per* k *dispari,* $Q = \forall$ *per* k *pari.*

Definizione 39 *Per ogni insieme* $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \in \Pi_k$ *se esiste un predicato ricorsivo* $P(x, y_1, \ldots, y_k)$ *tale che*

$$x \in A \text{ sse } \forall y_1 \exists y_2 \ldots Q y_k P(x, y_1, \ldots, y_k),$$

dove $Q = \forall$ *per* k *dispari,* $Q = \exists$ *per* k *pari.*

Definizione 40 *Per ogni insieme* $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \in \Delta_k$ *se* $A \in \Sigma_k$ *e* $A \in \Pi_k$.

Dalle definizioni deriva che $A \in \Sigma_n$ se e solo se $\overline{A} \in \Pi_n$.

L'insieme delle classi Σ_k e Π_k si chiama *gerarchia di Kleene* o *aritmetica*.

Σ_0 e Π_0 coincidono con la classe degli insiemi ricorsivi;
Σ_1 coincide con la classe degli insiemi r.e.;
Π_1 con la classe degli insiemi complemento di insiemi r.e.

Una definizione alternativa è :

$\Pi_0 = \Sigma_0 = \{P | P \text{ ricorsivo } \}$

$P \in \Sigma_{n+1}$ se e solo se esiste un $Q \in \Pi_n$ tale che
$\forall \mathbf{x}$: $(P(\mathbf{x})$ sse $\exists y Q(\mathbf{x}, y)$

$P \in \Pi_{n+1}$ se e solo se esiste un $Q \in \Sigma_n$ tale che
$\forall \mathbf{x}$: $(P(\mathbf{x})$ sse $\exists y Q(\mathbf{x}, y)$

$\Delta_n = \Pi_n \cap \Sigma_n$

Due proprietà fondamentali:

(i) $\forall i[\Sigma_i \subsetneq \Sigma_{i+1}]$ e $\forall i[\Pi_i \subsetneq \Pi_{i+1}]$;
(ii) $\forall i[\Sigma_i \cup \Pi_i \subset \Sigma_{i+1} \cap \Pi_{i+1}]$.

La gerarchia aritmetica è utilizzata per esprimere il livello di indecidibilità di un insieme; ad esempio, l'insieme $T = \{x | \varphi_x$ è totale $\}$ coincide con l'insieme $\{x | \forall y \exists k [\varphi_x(y)$ richiede meno di k passi$]\}$; quindi T appartiene a Π_2.

Gerarchia di Kleene