Riducibilitá fra problemi

Il concetto di riducibilità si è rivelato uno strumento molto utile nella teoria della calcolabilità per dimostrare che non è possibile calcolare alcune funzioni e per classificare le stesse in base al loro grado di non calcolabilità.

In modo informale si può affermare che una funzione è riducibile ad un'altra se un metodo per calcolare la seconda funzione produce un metodo per calcolare la prima. Perciò una proprietà fondamentale che ogni tipo di riducibilità deve possedere è che se f_1 è una funzione riducibile ad un'altra funzione f_2 calcolabile, allora anche f_1 è calcolabile.

Un concetto analogo si ritrova in teoria della complessità, dove siamo interessati a caratterizzare la complessità di un problema relativamente ad altri problemi.

In questo ambito, i concetti di riducibilità e di riduzione rappresentano uno strumento di fondamentale importanza per individuare relazioni tra le complessità di problemi diversi.

Una *riduzione* da un problema $\mathcal{P}_1$ a un problema $\mathcal{P}_2$ fornisce un metodo per risolvere $\mathcal{P}_1$ assumendo di essere in grado di risolvere $\mathcal{P}_2$ e facendo uso di di un algoritmo per $\mathcal{P}_2$.

Allora possiamo dedurre che risolvere $\mathcal{P}_2$ è almeno tanto difficile che risolvere $\mathcal{P}_1$, assunto che la riduzione comporti una computazione "sufficientemente semplice".

Si possono definire tipi diversi di riducibilità, sotto diverse ipotesi su *come* la soluzione di $\mathcal{P}_2$ possa essere utilizzata per risolvere $\mathcal{P}_1$.

Definizione 44 *Un problema di decisione* $\mathcal{P}_1$ è Karp-riducibile *(o riducibile* molti-a-uno*) a un problema di decisione* $\mathcal{P}_2$ *(denotato con* $\mathcal{P}_1 \leq_m \mathcal{P}_2$*) se e solo se esiste una algoritmo* $\mathcal{R}$ *che trasforma ogni istanza* $x \in I_{\mathcal{P}_1}$ *di* $\mathcal{P}_1$ *in una istanza* $y \in I_{\mathcal{P}_2}$ *di* $\mathcal{P}_2$ *in modo tale che* $x \in Y_{\mathcal{P}_1}$ *se e solo se* $y \in Y_{\mathcal{P}_2}$*.*
$\mathcal{R}$ *è detta Karp-riduzione da* $\mathcal{P}_1$ *a* $\mathcal{P}_2$*.*

Se esiste una Karp-riduzione $\mathcal{R}$ da $\mathcal{P}_1$ a $\mathcal{P}_2$ e se si conosce un algoritmo $\mathcal{A}_2$ per $\mathcal{P}_2$, allora si può ottenere un algoritmo $\mathcal{A}_1$ per $\mathcal{P}_1$ così:
1. data una istanza $x \in I_{\mathcal{P}_1}$, si applica $\mathcal{R}$ a x e si ottiene $y \in I_{\mathcal{P}_2}$;
2. si applica $\mathcal{A}_2$ a y: se $\mathcal{A}_2$ restituisce VERO allora si restituisce VERO, altrimenti si restituisce FALSO.

$t_{\mathcal{A}_1}(|x|) = t_{\mathcal{R}}(|x|) + t_{\mathcal{A}_2}(|y|)$
Se $t_{\mathcal{R}}(|x|) = O(t_{\mathcal{A}_2}(|y|))$ allora $t_{\mathcal{A}_1}(|x|) = \Theta(t_{\mathcal{A}_2}(|y|))$

Nella Karp-riducibilità la complessità di $\mathcal{P}_1$ risulta essere un lower bound della complessità di $\mathcal{P}_2$, e viceversa, la La complessità di $\mathcal{P}_2$ risulta essere un upper bound della complessità di $\mathcal{P}_1$.

Un caso interessante è il seguente:

Definizione 45 *Un problema di decisione* $\mathcal{P}_1$ è Karp-riducibile polinomialmente *a un problema di decisione* $\mathcal{P}_2$ *(denotato con* $\mathcal{P}_1 \leq_m^p \mathcal{P}_2$*) se e solo se* $\mathcal{P}_1$ *è Karp-riducibile a* $\mathcal{P}_2$ *e la riduzione* $\mathcal{R}$ *è un algoritmo calcolabile in tempo polinomiale.*

Quindi se $\mathcal{P}_1 \leq_m^p \mathcal{P}_2$, allora saper risolvere efficientemente (in tempo polinomiale) $\mathcal{P}_2$ comporta che anche $\mathcal{P}_1$ può essere risolto efficientemente.

Esempio 46 *Sia $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un insieme di variabili booleane e sia $\mathcal{T}(X) = \{x_1, \overline{x}_1 \ldots, x_n, \overline{x}_n\}$ il corrispondente insieme di* termini.

Un assegnamento di veritá *su X, $f : X \mapsto \{VERO, FALSO\}$, soddisfa il termine x_i se $f(x_i) =$ VERO e il termine $\overline{x}_i$ se $f(x_i) =$ FALSO.*

Una clausola *(disgiuntiva) è un insieme di termini $c = \{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq \mathcal{T}(X)$.*
E' soddisfatta *da f se e solo se esiste (almeno) un termine t_i soddisfatto da f.*

*Una formula in CNF (*forma normale congiuntiva*) è definita come una collezione di clausole $\mathcal{F} = \{c_1, \ldots c_m\}$. E' soddisfatta da f se e solo se ogni clausola $c_1, \ldots c_m$ è soddisfatta da f.*

SODDISFACIBILITÁ
ISTANZA: una formula CNF $\mathcal{F}$ su un insieme X di variabili booleane.
PREDICATO: esiste una assegnazione $f : X \mapsto \{VERO, FALSO\}$ che soddisfa $\mathcal{F}$?

PROGRAMMAZIONE LINEARE 0-1
ISTANZA: insieme Z di variabili con dominio $\{0, 1\}$, insieme $\mathcal{I}$ di disequazioni lineari su Z.
PREDICATO: esiste una soluzione a $\mathcal{I}$, cioè un'assegnazione di valori alle variabili di Z che verifica tutte le disequazioni?

Si osserva che SODDISFACIBILITÁ $\leq_m^p$ PROGRAMMAZIONE LINEARE 0-1.

Ogni istanza $x_{SAT} = \{X, \mathcal{F}\}$ di SODDISFACIBILITÀ può essere ridotta ad una istanza corrispondente $x_{LP} = \{Z, \mathcal{I}\}$ di PROGRAMMAZIONE LINEARE 0-1.

Sia $\{t_{j_1}, t_{j_2}, \ldots, t_{j_{n_j}}\}$ la j-ma clausola in $\mathcal{F}$. Possiamo derivare la disequazione corrispondente $\zeta_{j_1} + \zeta_{j_2} + \ldots + \zeta_{j_{n_j}} > 0$ per x_{LP}, dove $\zeta_{j_k} = z_{j_k}$ se $t_{j_k} = x_{j_k}$ e $\zeta_{j_k} = (1 - z_{j_k})$ se $t_{j_k} = \overline{x}_{j_k}$.

Si verifica immediatamente che una qualunque assegnazione di verità $f : X \mapsto \{VERO, FALSO\}$ soddisfa $\mathcal{F}$ se e solo se tutte le disequazioni in $\mathcal{I}$ sono soddisfatte da un'assegnazione di valori $f' : Z \mapsto \{0, 1\}$ tale che $f'(z_i) = 1$ se e solo se $f(x_i) = VERO$.

La riduzione è calcolabile in tempo polinomiale.

Poiché si possono dare altre definizioni di riducibilità (e.g. Turing-riducibilità) indicheremo la relazione di riducibilità tra problemi come $\leq_r$.

Definizione 47 *Una classe di complessitá $\mathcal{C}$* è chiusa *rispetto ad una riducibilitá $\leq_r$ se e solo se per ogni coppia di problemi $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ tali che $\mathcal{P}_1 \leq_r \mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_2 \in \mathcal{C}$ implica $\mathcal{P}_1 \in \mathcal{C}$.*

Definizione 48 *Per ogni classe di complessitá $\mathcal{C}$, un problema di decisione $\mathcal{P}$ viene detto difficile in $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$-hard) rispetto ad una riducibilitá $\leq_r$ se e solo se per ogni altro problema di decisione $\mathcal{P}_1 \in \mathcal{C}$ si ha che $\mathcal{P}_1 \leq_r \mathcal{P}$.*

Definizione 49 *Per ogni classe di complessitá $\mathcal{C}$, un problema di decisione $\mathcal{P}$ viene detto completo in $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$-complete) rispetto ad una riducibilitá $\leq_r$ se $\mathcal{P}$ è $\mathcal{C}$-hard e $\mathcal{P} \in \mathcal{C}$.*

Quindi se $\mathcal{P}_1$ è $\mathcal{C}$-hard (rispetto a $\leq_r$) e $\mathcal{P}_1 \leq_r \mathcal{P}_2$ allora anche $\mathcal{P}_2$ è $\mathcal{C}$-hard. Inoltre se $\mathcal{P}_2 \in \mathcal{C}$ allora $\mathcal{P}_2$ è $\mathcal{C}$-completo.

Lemma 50 *Date due classi di complessità, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ tali che $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_1$ è chiusa rispetto a $\leq_r$, ogni problema $\mathcal{P}$ $\mathcal{C}_2$-completo appartiene a $\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1$.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che $\mathcal{P} \in \mathcal{C}_1$. Allora, dato un problema $\mathcal{P}_1 \in \mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1$, si ha che $\mathcal{P}_1 \leq_r \mathcal{P}$ per la completezza di $\mathcal{P}$. Allora, per la chiusura di $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{P} \in \mathcal{C}_1$ comporterebbe che $\mathcal{P}_1 \in \mathcal{C}_1$. Assurdo.

Quindi, date due classi di complessità, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ tali che $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$, il miglior approccio per determinare se $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ o se, al contrario, $\mathcal{C}_1 \equiv \mathcal{C}_2$ è quello di studiare la complessità dei problemi $\mathcal{C}_2$-completi rispetto ad una riducibilità per la quale $\mathcal{C}_2$ è chiusa.

Dimostrare che $\mathcal{C}_1 \equiv \mathcal{C}_2$

1. individuare una riducibilità $\leq_r$ tale che $\mathcal{C}_1$è chiusa rispetto a $\leq_r$;

2. identificare un problema $\mathcal{P}$ $\mathcal{C}_2$-completo rispetto a $\leq_r$

3. dimostrare che $\mathcal{P} \in \mathcal{C}_1$

Al contrario, mostrare che $\mathcal{P} \notin \mathcal{C}_1$ implica che $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$.