

# Insiemi, Numerabilità e Calcolabilità

## Sommario

- Riepilogo sugli insiemi
- Insiemi numerabili e insiemi più che numerabili
- Incalcolabilità della calcolabilità
- Insiemi effettivamente numerabili
- Funzioni parziali e calcolabilità

## Equipotenza e Cardinalità

- L'insieme A è **equipotente** all'insieme B sse esiste una funzione biiettiva  $f:A \rightarrow B$
- Due insiemi equipotenti hanno la stessa cardinalità
  - $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$
- Se A è equipotente a un sottoinsieme di B, allora  $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$

## Insiemi Finiti

- Un insieme è finito se ha n elementi, con n finito
  - $\text{Card}(A) = n$
- Se  $\text{Card}(A) = n$  **non** esiste alcuna funzione biiettiva tra A e una sua parte propria
  - (parte propria = sottoinsieme di A diverso da A stesso)

## Insiemi Infiniti

- Se un insieme A ha un numero infinito di elementi, allora è **infinito**
- Per ogni insieme infinito A **esiste** (almeno) una funzione biiettiva tra A e una sua parte propria

## Numerabilità

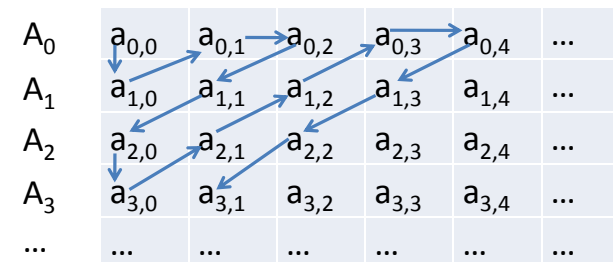
- Un insieme A è **numerabile** sse può essere messo in corrispondenza biunivoca con  $\mathbb{N}$
- Se A è numerabile,  $\text{Card}(A) = \text{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$

## Numerabilità: Esempi (1)

- $\mathbb{N}$  e i suoi sottoinsiemi seguenti:
  - L'insieme dei numeri pari
    - 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...
  - L'insieme dei numeri dispari
    - 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, ...
  - L'insieme dei numeri primi
    - 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...
  - L'insieme delle potenze di 2
    - 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...
- In generale: un sottoinsieme infinito di un insieme numerabile è numerabile

## Numerabilità: Esempi (2)

- $\mathbb{Z}$  è numerabile
  - 0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, ...
- La successione infinita  $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$  di insiemi numerabili (senza ripetizioni) è numerabile



## Numerabilità: Esempi (3)

- L'insieme di tutte le successioni infinite di 0 e 1, t.c. da un certo punto in poi sono tutti 0 è numerabile
- ...

## Insiemi più che Numerabili

- Esistono insiemi che **non** possono essere messi in relazione biunivoca con  $\mathbb{N}$
- Sono gli insiemi **più che numerabili**
- Ad es.
  - l'insieme  $G$  di tutte le successioni di 0 e 1
  - $\mathbb{R}$
  - ...

## Numerabilità delle Funzioni Calcolabili (1)

- Una funzione è calcolabile sse esiste un algoritmo che ne calcola i valori
  - Quella funzione è calcolata da più di un algoritmo
- Se  $FC$  è l'insieme delle funzioni calcolabili, allora  $\text{Card}(FC) \leq \text{Card}(\text{Alg})$ , dove  $\text{Alg}$  è l'insieme degli algoritmi

## Numerabilità delle Funzioni Calcolabili (2)

- Un  $a \in \text{Alg}$  è una successione di istruzioni in un linguaggio  $L$ , generato da un alfabeto finito
  - È una successione di stringhe di  $L$
- L'insieme delle stringhe di un  $L$  generato da un  $L$  finito è un insieme finito oppure numerabile
- Quindi  $\text{Alg}$  è al più numerabile, quindi  $FC$  è al più numerabile
- Ma l'insieme delle funzioni aritmetiche è più che numerabile, quindi esistono funzioni aritmetiche che non appartengono a  $FC$