

# Funzioni Ricorsive

# Sommario

- Scopo
- Funzioni ricorsive primitive
- Funzioni ricorsive generali

# Scopo

- Individuare un insieme di funzioni calcolabili particolarmente “semplici”: **funzioni base**
- Individuare operazioni su funzioni che **conservano** la calcolabilità
- Creare nuove funzioni ottenute a partire da quelle base applicando le operazioni
  - Le nuove funzioni ottenute sono calcolabili

# Ricorsione

- Definire una funzione stabilendone un valore per un argomento iniziale (**base della ricorsione**)
- Supponendo noto il valore della funzione per l'argomento  $n$ , definire il valore della funzione per l'argomento  $\text{succ}(n)$  (**passo della ricorsione**)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0)=k \\ f(\text{succ}(n))= g(n, f(n)) \end{array} \right.$$

## Funzioni Base

- Funzione zero  $Z:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$  tale che  $\forall x Z(x)=0$
- Funzione successore  $\text{succ}:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$  tale che  $\forall x \text{succ}(x)=x+1$
- Funzioni proiezione  $P_i^n:\mathbb{N}^n\rightarrow\mathbb{N}$  tali che  $P_i^n(x_1, x_2, \dots, x_n)=x_i$ , con  $n>1$  e  $1\leq i\leq n$

## Operazioni su Funzioni (1)

- Operazione di composizione
  - Date le  $k+1$  funzioni  $f:\mathbb{N}^k\rightarrow\mathbb{N}$ ,  $g_1, g_2, \dots, g_k$  tutte  $\mathbb{N}^n\rightarrow\mathbb{N}$ , allora la funzione  $h:\mathbb{N}^n\rightarrow\mathbb{N}$  tale che  $h(x_1, x_2, \dots, x_n)=f(g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, x_2, \dots, x_n))$  è ottenuta dalle  $k+1$  funzioni mediante **composizione**

## Operazioni su Funzioni (2)

- Operazione di ricorsione
  - Date le 2 funzioni  $f:\mathbb{N}^n\rightarrow\mathbb{N}$ , e  $g:\mathbb{N}^{n+2}\rightarrow\mathbb{N}$ , allora la funzione  $h:\mathbb{N}^{n+1}\rightarrow\mathbb{N}$  tale che
$$\left\{ \begin{array}{l} h(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)=f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ h(x_1, x_2, \dots, x_n, \text{succ}(y))=g(x_1, x_2, \dots, x_n, y, h(x_1, x_2, \dots, x_n, y)) \end{array} \right.$$
  - è ottenuta dalle  $k+1$  funzioni mediante **ricorsione**

## Funzioni Primitive Ricorsive

- Una funzione è **primitiva ricorsiva** se è ottenuta applicando un numero finito di volte la composizione e la ricorsione a una o più funzioni base
- Tutte le funzioni primitive ricorsive sono calcolabili
- Esistono funzioni calcolabili che non sono ricorsive primitive
  - Ad es. funzione di Ackermann

## Operatore di Minimalizzazione (1)

- L'operatore di minimalizzazione  $\mu$  permette di trovare il più piccolo elemento di un insieme che soddisfa una data condizione
- Ad es, data la relazione  $R(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ , allora l'espressione  $\mu y R(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$  permette di individuare il più piccolo tra tutti gli  $y$  che soddisfa la  $R$

## Operatore di Minimalizzazione (2)

- Formalmente:
- Data la funzione  $f: \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$ , allora la funzione  $g: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$  tale che  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mu y (f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0)$  è ottenuta dalla funzione  $f$  mediante minimalizzazione

## Funzioni Ricorsive Generali

- Una funzione è **ricorsiva generale** se è ottenuta applicando un numero finito di volte la composizione, la ricorsione e la minimalizzazione a una o più funzioni base
- La classe delle funzioni ricorsive generali è la più piccola classe di funzioni aritmetiche contenente le funzioni base e chiusa rispetto agli operatori di composizione, ricorsione e minimalizzazione

## Computabilità delle Funzioni Ricorsive Generali

- Sono T-computabili tutte e sole le funzioni ricorsive generali