

Insiemi, Numerabilità e Calcolabilità

Sommario

- Riepilogo sugli insiemi
- Insiemi numerabili e insiemi più che numerabili
- Incalcolabilità della calcolabilità
- Insiemi effettivamente numerabili
- Funzioni parziali e calcolabilità

Equipotenza e Cardinalità

- L'insieme A è **equipotente** all'insieme B sse esiste una funzione biiettiva $f:A \rightarrow B$
- Due insiemi equipotenti hanno la stessa cardinalità
 - $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$
- Se A è equipotente a un sottoinsieme di B, allora $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$

Insiemi Finiti

- Un insieme è finito se ha n elementi, con n finito
 - $\text{Card}(A) = n$
- Se $\text{Card}(A) = n$ **non** esiste alcuna funzione biiettiva tra A e una sua parte propria
 - (parte propria = sottoinsieme di A diverso da A stesso)

Insiemi Infiniti

- Se un insieme A ha un numero infinito di elementi, allora è **infinito**
- Per ogni insieme infinito A **esiste** (almeno) una funzione biiettiva tra A e una sua parte propria

Numerabilità

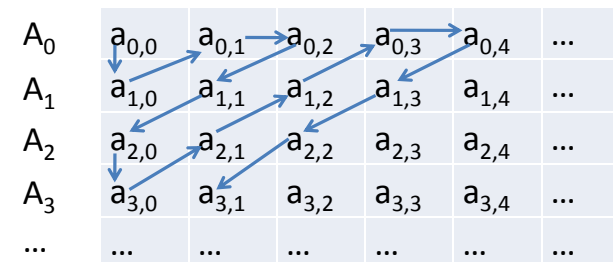
- Un insieme A è **numerabile** sse può essere messo in corrispondenza biunivoca con \mathbb{N}
- Se A è numerabile, $\text{Card}(A) = \text{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$

Numerabilità: Esempi (1)

- \mathbb{N} e i suoi sottoinsiemi seguenti:
 - L'insieme dei numeri pari
 - 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...
 - L'insieme dei numeri dispari
 - 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, ...
 - L'insieme dei numeri primi
 - 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...
 - L'insieme delle potenze di 2
 - 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...
- In generale: un sottoinsieme infinito di un insieme numerabile è numerabile

Numerabilità: Esempi (2)

- \mathbb{Z} è numerabile
 - 0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, ...
- La successione infinita $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ di insiemi numerabili (senza ripetizioni) è numerabile



Numerabilità: Esempi (3)

- L'insieme di tutte le successioni infinite di 0 e 1, t.c. da un certo punto in poi sono tutti 0 è numerabile
- ...

Insiemi più che Numerabili

- Esistono insiemi che **non** possono essere messi in relazione biunivoca con \mathbb{N}
- Sono gli insiemi **più che numerabili**
- Ad es.
 - l'insieme G di tutte le successioni di 0 e 1
 - \mathbb{R}
 - ...

Numerabilità delle Funzioni Calcolabili (1)

- Una funzione è calcolabile sse esiste un algoritmo che ne calcola i valori
 - Quella funzione è calcolata da più di un algoritmo
- Se FC è l'insieme delle funzioni calcolabili, allora $\text{Card}(FC) \leq \text{Card}(\text{Alg})$, dove Alg è l'insieme degli algoritmi

Numerabilità delle Funzioni Calcolabili (2)

- Un $a \in \text{Alg}$ è una successione di istruzioni in un linguaggio L , generato da un alfabeto finito
 - È una successione di stringhe di L
- L'insieme delle stringhe di un L generato da un L finito è un insieme finito oppure numerabile
- Quindi Alg è al più numerabile, quindi FC è al più numerabile
- Ma l'insieme delle funzioni aritmetiche è più che numerabile, quindi esistono funzioni aritmetiche che non appartengono a FC