

# Funzioni e Calcolabilità

# Sommario

- Riepilogo nozioni matematiche di base
- Il concetto di funzione
- Funzioni e algoritmi
- Decidibilità
- Funzioni parziali e calcolabilità

# Funzione

- Una funzione è una corrispondenza tra due insiemi, che fa corrispondere ad **ogni elemento** del primo insieme (**dominio**) **uno e un solo elemento** del secondo (**codominio**)

$$f: D \rightarrow C$$

- In generale D e C sono diversi,
  - noi considereremo **quasi sempre**  $D = C = \mathbb{N} =$  insieme dei naturali  $= \{0, 1, 2, \dots\}$  o un suo sottoinsieme

# Argomenti e Valori

- L'elemento di D a cui la funzione f fa corrispondere l'elemento in C è detto **argomento**
- L'elemento in C corrispondente attraverso la funzione f a un argomento è detto **valore**

## Esempi

- $f_1(x) = 2x$
- $f_2(x) = 3$
- $f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ è pari} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$

## Funzioni a più argomenti (1)

- In generale, una funzione può avere più di un argomento
- Ad esempio la funzione sum seguente ha 3 argomenti (sum:  $\mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ ):  
$$\text{sum}(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$$
- In questo caso il dominio è l'insieme delle terne ordinate su  $\mathbb{N}$  ( $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^3$ )

## Funzioni a più argomenti (2)

- Più in generale, un'espressione  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  con  $n$  argomenti tale che,
    - se  $x_1 \in D_1, x_2 \in D_2, \dots, x_n \in D_n$ , allora  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C$
- individua una funzione  $f: D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n \rightarrow C$  che ha come dominio l'insieme delle  $n$ -ple ordinate  $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$  e come codominio  $C$

## Rango di una funzione

- Talvolta l'insieme di valori di una funzione (detto **rango**) coincide con tutto il codominio, talaltra con un suo sottoinsieme
  - Es: se  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , t.c.  $f(x) = x^2$  il rango è il sottoinsieme di  $\mathbb{N}$  costituito dai soli quadrati perfetti

## Funzioni suriettive

- $f: D \rightarrow C$  è **suriettiva** sse il suo rango coincide con  $C$ 
  - $\forall y \in C$  esiste un  $x \in D$  t.c.  $f(x)=y$
- Tutte le funzioni non suriettive possono essere trasformate in suriettive restringendo  $C$  al solo rango

## Funzioni iniettive

- $f: D \rightarrow C$  è **iniettiva** sse a elementi distinti del dominio fa corrispondere elementi distinti del codominio
  - $\forall x_1, x_2 \in D$ , se  $x_1 \neq x_2$  allora  $f(x_1) \neq f(x_2)$

## Funzioni biiettive

- $f: D \rightarrow C$  è **biiettiva** sse è sia suriettiva che iniettiva
  - Una funzione biiettiva è anche detta **corrispondenza biunivoca**

## Funzioni inversa e identità

- Sia  $f: D \rightarrow C$  una funzione biiettiva. La **funzione inversa** di  $f$  è la funzione  $f^{-1}: C \rightarrow D$  t.c.  $f^{-1}(y) = x$  sse  $f(x)=y$
- Dato un qualsiasi insieme  $D$ , la funzione  $f: D \rightarrow D$  t.c.  $\forall x \in D f(x)=x$  è detta funzione identità
  - È indicata con  $i_D$

## Funzione composta

- Date due funzioni  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow C$ , si può definire la **funzione composta di f con g** (in simboli  $g \circ f$ ) come  $h: A \rightarrow C$  t.c.  $\forall a \in A$   
 $h(a) = g(f(a))$

## Funzioni e Algoritmi (1)

- Ogni algoritmo può essere assimilato a una funzione
  - I dati in input corrispondono agli argomenti
  - I dati in output ai valori
- Un algoritmo A **calcola una funzione**  $f: D \rightarrow C$  sse  $\forall x \in D$   $f(x) = y$  sse A con input x produce come output y

## Funzioni e Algoritmi (2)

- Una funzione è calcolabile (o computabile) sse esiste (almeno) un algoritmo che la calcola
- Una funzione è calcolabile sse esiste (almeno) una MdT che realizza il corrispondente algoritmo
- **Esistono funzioni non calcolabili**

## Decidibilità

- Una **proprietà** di un dominio è decidibile se esiste un algoritmo che permette di stabilire se la proprietà sussiste per ogni elemento del dominio
  - Es:  $x$  è pari è decidibile in  $\mathbb{N}$
- Una **relazione** tra due (o più) elementi in un insieme è decidibile se esiste un algoritmo per stabilire se la relazione sussiste tra i due (o più) elementi

## Funzioni Totali e Parziali

- Le funzioni che associano a **ogni** elemento del Dominio un elemento del codominio sono dette **totali**
- Esistono funzioni **parziali** che associano un elemento del codominio solo a elementi in un sottoinsieme del dominio (detto **campo di esistenza**)
- Se  $D$  è il dominio e  $CE$  il campo di esistenza, allora  $\forall x \in D \setminus CE \ f(x) = \perp$  (indefinito)

## Calcolabilità di Funzioni Parziali

- Una funzione  $f: D \rightarrow C$  parziale con campo di esistenza  $CE$  è computabile sse esiste un algoritmo  $A$  t.c.:
  - se  $x \in CE$  e  $f(x) = y$  allora  $A$  con input  $x$  produce l'output  $y$
  - se  $x \in D \setminus CE$  (cioè  $f(x) = \perp$ ) allora  $A$  con input  $x$  non produce alcun output

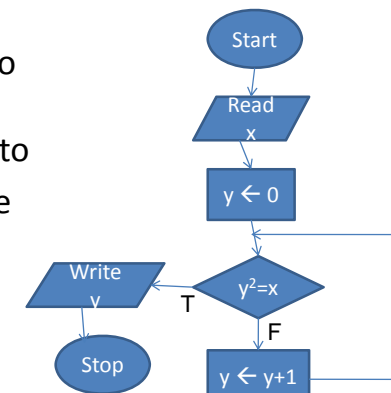
## Esempio: Radice quadrata (1)

- La funzione  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  che calcola la radice quadrata di  $x$  è parziale:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \text{ è un quadrato} \\ \perp & \text{altrimenti} \end{cases}$$

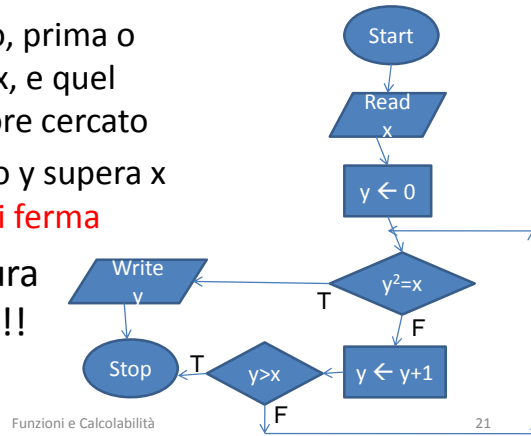
## Esempio: Radice quadrata (2)

- Algoritmo 1
  - Si incrementa  $y$
  - Se  $x$  è un quadrato, prima o poi  $y^2$  diventa  $= a x$ , e quel valore di  $y$  è il valore cercato
  - Altrimenti la computazione **prosegue all'infinito**
- È diverso dalla figura riportata nel libro!!!



## Esempio: Radice quadrata (3)

- Algoritmo 2
  - Si incrementa  $y$
  - Se  $x$  è un quadrato, prima o poi  $y^2$  diventa  $= a x$ , e quel valore di  $y$  è il valore cercato
  - Altrimenti, quando  $y$  supera  $x$  **la computazione si ferma**
- È diverso dalla figura riportata nel libro!!!



Funzioni e Calcolabilità

21

## Esempio: Radice quadrata (4)

- Entrambi gli algoritmi:
  - sono poco efficienti
  - calcolano il valore della radice quadrata in **numero finito di passi** solo se il valore in input è un quadrato perfetto
- Se l'input non è un quadrato perfetto, allora hanno due comportamenti diversi:
  - uno continua a calcolare all'infinito
  - l'altro finisce la computazione dopo un numero finito di passi senza alcun messaggio

Funzioni e Calcolabilità

22

## Generalizzazione dell'esempio (1)

- Se, per una funzione parziale  $f$ , è possibile scrivere un algoritmo che termina, allora è possibile estendere la funzione  $f$  ad una funzione totale  $f'$  che calcola un valore convenzionale (ad es 0) per gli argomenti per cui  $f$  è indefinita:

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in CE \\ 0 & \text{se } x \in D \setminus CE \end{cases}$$

Funzioni e Calcolabilità

23

## Generalizzazione dell'esempio (2)

- Esistono funzioni parziali per le quali **NON** è possibile l'estensione a funzioni totali

Funzioni e Calcolabilità

24

## Nota di Programmazione

- I moduli di Controllo dell'Input visti in precedenza hanno lo scopo di gestire questi eventi
  - Anziché usare il valore di output 0 si usano opportuni codici di errore