

Funzioni e Calcolabilità

Sommario

- Riepilogo nozioni matematiche di base
- Il concetto di funzione
- Funzioni e algoritmi
- Decidibilità
- Funzioni parziali e calcolabilità

Funzione

- Una funzione è una corrispondenza tra due insiemi, che fa corrispondere ad **ogni elemento** del primo insieme (**dominio**) **uno e un solo elemento** del secondo (**codominio**)

$$f: D \rightarrow C$$

- In generale D e C sono diversi,
 - noi considereremo **quasi sempre** $D = C = \mathbb{N} =$ insieme dei naturali $= \{0, 1, 2, \dots\}$ o un suo sottoinsieme

Argomenti e Valori

- L'elemento di D a cui la funzione f fa corrispondere l'elemento in C è detto **argomento**
- L'elemento in C corrispondente attraverso la funzione f a un argomento è detto **valore**

Esempi

- $f_1(x) = 2x$
- $f_2(x) = 3$
- $f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ è pari} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Funzioni a più argomenti (1)

- In generale, una funzione può avere più di un argomento
- Ad esempio la funzione sum seguente ha 3 argomenti (sum: $\mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$):
$$\text{sum}(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$$
- In questo caso il dominio è l'insieme delle terne ordinate su \mathbb{N} ($\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^3$)

Funzioni a più argomenti (2)

- Più in generale, un'espressione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con n argomenti tale che,
 - se $x_1 \in D_1, x_2 \in D_2, \dots, x_n \in D_n$, allora $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C$
- individua una funzione $f: D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n \rightarrow C$ che ha come dominio l'insieme delle n -ple ordinate $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$ e come codominio C

Rango di una funzione

- Talvolta l'insieme di valori di una funzione (detto **rango**) coincide con tutto il codominio, talaltra con un suo sottoinsieme
 - Es: se $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, t.c. $f(x) = x^2$ il rango è il sottoinsieme di \mathbb{N} costituito dai soli quadrati perfetti

Funzioni suriettive

- $f: D \rightarrow C$ è **suriettiva** sse il suo rango coincide con C
 - $\forall y \in C$ esiste un $x \in D$ t.c. $f(x)=y$
- Tutte le funzioni non suriettive possono essere trasformate in suriettive restringendo C al solo rango

Funzioni iniettive

- $f: D \rightarrow C$ è **iniettiva** sse a elementi distinti del dominio fa corrispondere elementi distinti del codominio
 - $\forall x_1, x_2 \in D$, se $x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$

Funzioni biiettive

- $f: D \rightarrow C$ è **biiettiva** sse è sia suriettiva che iniettiva
 - Una funzione biiettiva è anche detta **corrispondenza biunivoca**

Funzioni inversa e identità

- Sia $f: D \rightarrow C$ una funzione biiettiva. La **funzione inversa** di f è la funzione $f^{-1}: C \rightarrow D$ t.c. $f^{-1}(y) = x$ sse $f(x)=y$
- Dato un qualsiasi insieme D , la funzione $f: D \rightarrow D$ t.c. $\forall x \in D f(x)=x$ è detta funzione identità
 - È indicata con i_D

Funzione composta

- Date due funzioni $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$, si può definire la **funzione composta di f con g** (in simboli $g \circ f$) come $h: A \rightarrow C$ t.c. $\forall a \in A$
 $h(a) = g(f(a))$

Funzioni e Algoritmi (1)

- Ogni algoritmo può essere assimilato a una funzione
 - I dati in input corrispondono agli argomenti
 - I dati in output ai valori
- Un algoritmo A **calcola una funzione** $f: D \rightarrow C$ sse $\forall x \in D$ $f(x) = y$ sse A con input x produce come output y

Funzioni e Algoritmi (2)

- Una funzione è calcolabile (o computabile) sse esiste (almeno) un algoritmo che la calcola
- Una funzione è calcolabile sse esiste (almeno) una MdT che realizza il corrispondente algoritmo
- **Esistono funzioni non calcolabili**

Decidibilità

- Una **proprietà** di un dominio è decidibile se esiste un algoritmo che permette di stabilire se la proprietà sussiste per ogni elemento del dominio
 - Es: x è pari è decidibile in \mathbb{N}
- Una **relazione** tra due (o più) elementi in un insieme è decidibile se esiste un algoritmo per stabilire se la relazione sussiste tra i due (o più) elementi

Funzioni Totali e Parziali

- Le funzioni che associano a **ogni** elemento del Dominio un elemento del codominio sono dette **totali**
- Esistono funzioni **parziali** che associano un elemento del codominio solo a elementi in un sottoinsieme del dominio (detto **campo di esistenza**)
- Se D è il dominio e CE il campo di esistenza, allora $\forall x \in D \setminus CE \ f(x) = \perp$ (indefinito)

Calcolabilità di Funzioni Parziali

- Una funzione $f:D \rightarrow C$ parziale con campo di esistenza CE è computabile sse esiste un algoritmo A t.c.:
 - se $x \in CE$ e $f(x)=y$ allora A con input x produce l'output y
 - se $x \in D \setminus CE$ (cioè $f(x)=\perp$) allora A con input x non produce alcun output

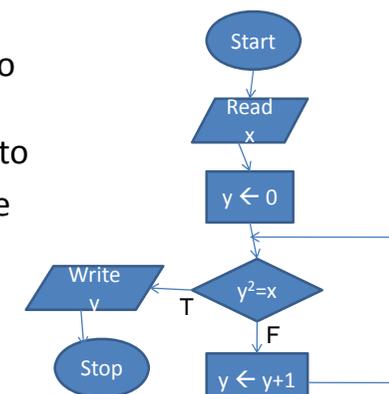
Esempio: Radice quadrata (1)

- La funzione $f:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ che calcola la radice quadrata di x è parziale:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \text{ è un quadrato} \\ \perp & \text{altrimenti} \end{cases}$$

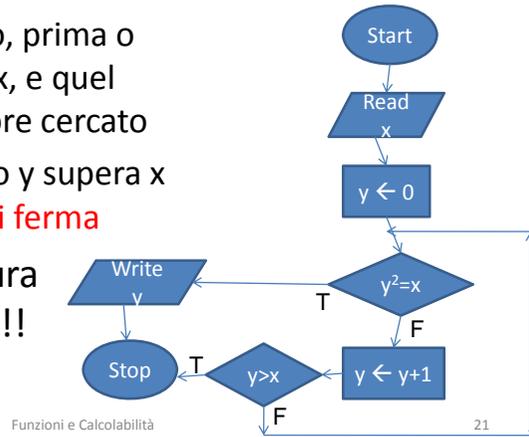
Esempio: Radice quadrata (2)

- Algoritmo 1
 - Si incrementa y
 - Se x è un quadrato, prima o poi y^2 diventa $= a x$, e quel valore di y è il valore cercato
 - Altrimenti la computazione **prosegue all'infinito**
- È diverso dalla figura riportata nel libro!!!



Esempio: Radice quadrata (3)

- Algoritmo 2
 - Si incrementa y
 - Se x è un quadrato, prima o poi y^2 diventa $= a x$, e quel valore di y è il valore cercato
 - Altrimenti, quando y supera x **la computazione si ferma**
- È diverso dalla figura riportata nel libro!!!



Funzioni e Calcolabilità

21

Esempio: Radice quadrata (4)

- Entrambi gli algoritmi:
 - sono poco efficienti
 - calcolano il valore della radice quadrata in **numero finito di passi** solo se il valore in input è un quadrato perfetto
- Se l'input non è un quadrato perfetto, allora hanno due comportamenti diversi:
 - uno continua a calcolare all'infinito
 - l'altro finisce la computazione dopo un numero finito di passi senza alcun messaggio

Funzioni e Calcolabilità

22

Generalizzazione dell'esempio (1)

- Se, per una funzione parziale f , è possibile scrivere un algoritmo che termina, allora è possibile estendere la funzione f ad una funzione totale f' che calcola un valore convenzionale (ad es 0) per gli argomenti per cui f è indefinita:

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \text{CE} \\ 0 & \text{se } x \in D \setminus \text{CE} \end{cases}$$

Funzioni e Calcolabilità

23

Generalizzazione dell'esempio (2)

- Esistono funzioni parziali per le quali **NON** è possibile l'estensione a funzioni totali

Funzioni e Calcolabilità

24

Nota di Programmazione

- I moduli di Controllo dell'Input visti in precedenza hanno lo scopo di gestire questi eventi
 - Aniché usare il valore di output 0 si usano opportuni codici di errore