

Rappresentazione Algebrica delle Reti di Petri

Generalità

- È una variante rappresentativa delle PN, basata su matrici e equazioni di stato
- Particolarmente utile per
 - analisi di proprietà
 - Validazione
- Queste dispense sono una rielaborazione a cura del docente della omonima tesina presentata da Giuseppe Fatiguso nell'a.a. 2013-14

Ri-definizione di PN (1)

- Al fine di dare una descrizione algebrica delle PN, è opportuno definire una PN in modo alternativo
- Una PN è una 4-pla $PN = \langle P, T, F, W \rangle$, dove
 - P è l'insieme finito e non vuoto dei place
 - T è l'insieme finito e non vuoto delle transition
 - $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ è la relazione di flusso della PN
 - $W : (P \times T) \cup (T \times P) \rightarrow \mathbb{N}$ è la funzione che associa un peso a ogni arco della PN

Ri-definizione di PN (2)

- Il peso associato a ogni arco è definito dalla relazione
 - $W(x, y) > 0$ sse $(x, y) \in F$
 - $W(x, y) = 0$ altrimenti
- Una marcatura M di una PN è una funzione $M: P \rightarrow \mathbb{N}$, dove, $\forall p \in P$:
 - $M(p)$ indica il numero di token in p
 - p è marcato sse $M(p) \geq 0$
 - M_0 è la marcatura iniziale

Esecuzione di una PN

- Le definizioni di preset / postset di una transizione sono analoghe a quelle già presentate
- La definizione di esecuzione di una PN è analoga a quella già presentata

Ulteriori Elementi Notazionali (1)

- $n=|P|$ è il numero di place della PN
- $m=|T|$ è il numero di transition
- $D^+ \in \mathbb{N}^{(n \times m)}$ è la matrice di incidenza dei postset
 - $D^+(p, t) = W(t, p)$
- $D^- \in \mathbb{N}^{(n \times m)}$ è la matrice di incidenza dei preset
 - $D^-(p, t) = W(p, t)$

Ulteriori Elementi Notazionali (2)

- $C \in \mathbb{Z}^{(n \times m)}$ è la matrice di incidenza della PN, dove
 - $C = D^+ - D^-$, cioè
 - $C(p, t) = W(t, p) - W(p, t)$
- La marcatura è quindi definita come un vettore $M_k \in \mathbb{N}^{(n \times 1)}$
- Le transizioni attivabili da una marcatura M_k sono rappresentate dal vettore
 - $e_t \in \{0, 1\}^{(m \times 1)}$

Reti di Petri Pure (1)

- Una PN è **pura** sse non contiene self-loop, cioè il grafo che la rappresenta
 - non contiene alcun place con arco entrante e uscente dalla stessa transition
 - non contiene alcuna transition con arco entrante e uscente dallo stesso place

Reti di Petri Pure (2)

- Una PN non pura può essere resa pura attraverso modifica strutturale
- È possibile dare rappresentazioni algebriche solo di PN pure

Attivazione Transizioni e Equazioni di Stato (1)

- Una transizione t_i è attivabile alla marcatura M_k sse
– $M_k[t_i > \Leftrightarrow M_k \geq D^-(\bullet, t_i)$ (Eq Stato 0)
- Se la marcatura M_{k+1} è raggiungibile dalla marcatura M_k attraverso l'attivazione della transizione t_i , allora
– $M_k[t_i > M_{k+1} \Leftrightarrow M_{k+1} = M_k + D^+(\bullet, t_i) - D^-(\bullet, t_i) = M_k + C(\bullet, t_i)$ (Eq Stato 1)

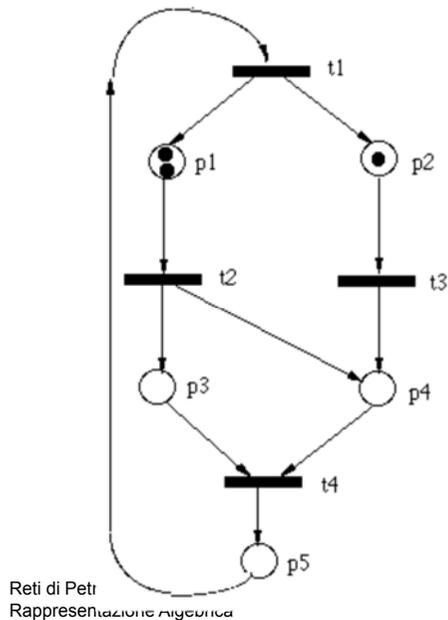
Attivazione Transizioni e Equazioni di Stato (2)

- L'equazione di stato 0 assume solo una forma vettoriale
- L'equazione di stato 1 assume una forma matriciale
- Nell'ipotesi di purezza, l'equazione di stato 1 permette di verificare la raggiungibilità di una marcatura:

$$-M_k[t_i > M_{k+1} \Leftrightarrow M_{k+1} = M_k + C \cdot e_{t_j} \geq 0 \text{ (Eq Stato 2)}$$

Sequenza di Attivazione delle Transizioni

- È definita come il vettore σ :
– $\sigma = e_{t_1} + e_{t_2} + \dots + e_{t_j}$
- L'equazione di stato 2 può quindi essere generalizzata in
– $M_k[t_i > M_{k+1} \Rightarrow M_{k+1} = M_0 + C \cdot \sigma \geq 0$ (Eq Stato 3)
- La precedente è detta **equazione fondamentale** di una PN
- σ è detto **vettore di conteggio delle**



Esempio: Notazione Grafica

Reti di Petri -
Rappresentazione Grafica

13

- $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$
- $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$
- $M_0 = (2, 1, 0, 0, 0)$

Esempio: Notazione Algebrica

$$D^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = D^+ - D^- = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reti di Petri -
Rappresentazione Algebrica

14

Espressione Algebrica delle Proprietà (1)

- Reachability:
 - M_k è raggiungibile da $M_0 \Leftrightarrow \exists \sigma : M_0[\sigma > M_k$
- Boundedness:
 - k -bound $\Leftrightarrow \forall M$ raggiungibile da M_0 si ha che $\forall p \in P \ M(p) \leq k$
- Conservativeness:
 - $\forall M$ raggiungibile da $M_0 \ \sum_{p \in P} M_0(p) = \sum_{p \in P} M(p)$

Reti di Petri -
Rappresentazione Algebrica

15

Espressione Algebrica delle Proprietà (2)

- Liveness:
 - $t_j \in T$ gode di liveness $\Leftrightarrow \exists \sigma : M_0[\sigma > M_k;$
- Reversibility:
 - PN reversible $\Leftrightarrow \forall M_k$ si ha che $M_0[\sigma_i > M_k$ e $M_k[\sigma_j > M_0$

Reti di Petri -
Rappresentazione Algebrica

16