

## Rappresentazione Algebrica delle Reti di Petri

## Generalità

- È una variante rappresentativa delle PN, basata su matrici e equazioni di stato
- Particolarmente utile per
  - analisi di proprietà
  - Validazione
- Queste dispense sono una rielaborazione a cura del docente della omonima tesina presentata da Giuseppe Fatiguso nell'a.a. 2013-14

## Ri-definizione di PN (1)

- Al fine di dare una descrizione algebrica delle PN, è opportuno definire una PN in modo alternativo
- Una PN è una 4-pla  $PN = \langle P, T, F, W \rangle$ , dove
  - $P$  è l'insieme finito e non vuoto dei place
  - $T$  è l'insieme finito e non vuoto delle transition
  - $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$  è la relazione di flusso della PN
  - $W : (P \times T) \cup (T \times P) \rightarrow \mathbb{N}$  è la funzione che associa un peso a ogni arco della PN

## Ri-definizione di PN (2)

- Il peso associato a ogni arco è definito dalla relazione
  - $W(x, y) > 0$  sse  $(x, y) \in F$
  - $W(x, y) = 0$  altrimenti
- Una marcatura  $M$  di una PN è una funzione  $M: P \rightarrow \mathbb{N}$ , dove,  $\forall p \in P$ :
  - $M(p)$  indica il numero di token in  $p$
  - $p$  è marcato sse  $M(p) \geq 0$
  - $M_0$  è la marcatura iniziale

## Esecuzione di una PN

- Le definizioni di preset / postset di una transizione sono analoghe a quelle già presentate
- La definizione di esecuzione di una PN è analoga a quella già presentata

## Ulteriori Elementi Notazionali (1)

- $n=|P|$  è il numero di place della PN
- $m=|T|$  è il numero di transition
- $D^+ \in \mathbb{N}^{(n \times m)}$  è la matrice di incidenza dei postset
  - $D^+(p, t) = W(t, p)$
- $D^- \in \mathbb{N}^{(n \times m)}$  è la matrice di incidenza dei preset
  - $D^-(p, t) = W(p, t)$

## Ulteriori Elementi Notazionali (2)

- $C \in \mathbb{Z}^{(n \times m)}$  è la matrice di incidenza della PN, dove
  - $C = D^+ - D^-$ , cioè
  - $C(p, t) = W(t, p) - W(p, t)$
- La marcatura è quindi definita come un vettore  $M_k \in \mathbb{N}^{(n \times 1)}$
- Le transizioni attivabili da una marcatura  $M_k$  sono rappresentate dal vettore
  - $e_t \in \{0, 1\}^{(m \times 1)}$

## Reti di Petri Pure (1)

- Una PN è **pura** sse non contiene self-loop, cioè il grafo che la rappresenta
  - non contiene alcun place con arco entrante e uscente dalla stessa transition
  - non contiene alcuna transition con arco entrante e uscente dallo stesso place

## Reti di Petri Pure (2)

- Una PN non pura può essere resa pura attraverso modifica strutturale
- È possibile dare rappresentazioni algebriche solo di PN pure

## Attivazione Transizioni e Equazioni di Stato (1)

- Una transizione  $t_i$  è attivabile alla marcatura  $M_k$  sse
  - $M_k[t_i > \Leftrightarrow M_k \geq D^-(\cdot, t_i)$  (Eq Stato 0)
- Se la marcatura  $M_{k+1}$  è raggiungibile dalla marcatura  $M_k$  attraverso l'attivazione della transizione  $t_i$ , allora
  - $M_k[t_i > M_{k+1} \Leftrightarrow M_{k+1} = M_k + D^+(\cdot, t_i) - D^-(\cdot, t_i) = M_k + C(\cdot, t_i)$  (Eq Stato 1)

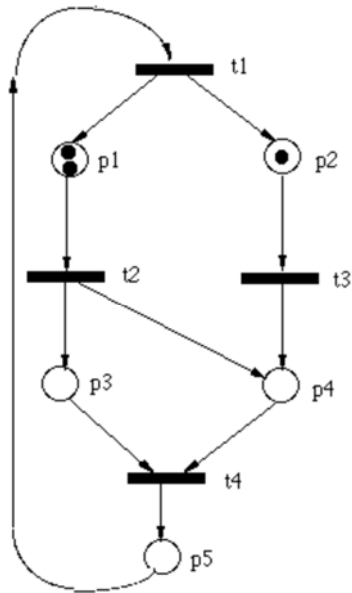
## Attivazione Transizioni e Equazioni di Stato (2)

- L'equazione di stato 0 assume solo una forma vettoriale
- L'equazione di stato 1 assume una forma matriciale
- Nell'ipotesi di purezza, l'equazione di stato 1 permette di verificare la raggiungibilità di una marcatura:

$$-M_k[t_i > M_{k+1} \Leftrightarrow M_{k+1} = M_k + C \cdot e_{t_j} \geq 0 \text{ (Eq Stato 2)}$$

## Sequenza di Attivazione delle Transizioni

- È definita come il vettore  $\sigma$ :
  - $\sigma = e_{t_1} + e_{t_2} + \dots + e_{t_j}$
- L'equazione di stato 2 può quindi essere generalizzata in
  - $M_k[t_i > M_{k+1} \Rightarrow M_{k+1} = M_0 + C \cdot \sigma \geq 0$  (Eq Stato 3)
- La precedente è detta **equazione fondamentale** di una PN



## Esempio: Notazione Grafica

Reti di Petri -  
Rappresentazione Grafica

13

- $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$
- $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$
- $M_0 = (2, 1, 0, 0, 0)$

## Esempio: Notazione Algebrica

- $D^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $D^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $C = D^+ - D^- = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Reti di Petri -  
Rappresentazione Algebrica

14

## Espressione Algebrica delle Proprietà (1)

- **Reachability:**
  - $M_k$  è raggiungibile da  $M_0 \Leftrightarrow \exists \sigma : M_0[\sigma > M_k$
- **Boundedness:**
  - $k$ -bound  $\Leftrightarrow \forall M$  raggiungibile da  $M_0$  si ha che  $\forall p \in P \ M(p) \leq k$
- **Conservativeness:**
  - $\forall M$  raggiungibile da  $M_0 \ \sum_{p \in P} M_0(p) = \sum_{p \in P} M(p)$

Reti di Petri -  
Rappresentazione Algebrica

15

## Espressione Algebrica delle Proprietà (2)

- **Liveness:**
  - $t_j \in T$  gode di liveness  $\Leftrightarrow \exists \sigma : M_0[\sigma > M_k$
- **Reversibility:**
  - PN reversible  $\Leftrightarrow \forall M_k$  si ha che  $M_0[\sigma_i > M_k$  e  $M_k[\sigma_j > M_0$

Reti di Petri -  
Rappresentazione Algebrica

16