Funzioni Ricorsive

Sommario

- Scopo
- Funzioni ricorsive primitive
- Funzioni ricorsive generali

Scopo

- Individuare un insieme di funzioni calcolabili particolarmente “semplici”: funzioni base
- Individuare operazioni su funzioni che conservano la calcolabilità
- Creare nuove funzioni ottenute a partire da quelle base applicando le operazioni
  - Le nuove funzioni ottenute sono calcolabili

Ricorsione

- Definire una funzione stabilendone un valore per un argomento iniziale (base della ricorsione)
- Supponendo noto il valore della funzione per l’argomento n, definire il valore della funzione per l’argomento succ(n) (passo della ricorsione)

$$\begin{cases} f(0)=k \\ f(succ(n))= g(n, f(n)) \end{cases}$$

Funzioni Base

- Funzione zero $Z:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ tale che $\forall$ x $Z(x)=0$
- Funzione successore succ: $\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ tale che $\forall$ x $succ(x)=x+1$
- Funzioni proiezione $P_i^n:\mathbb{N}^n\rightarrow\mathbb{N}$ tali che $P_i^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)= x_i$, con $n>1$ e $1 \leq i \leq n$

Operazioni su Funzioni (1)

- Operazione di composizione
  - Date le k+1 funzioni $f:\mathbb{N}^k\rightarrow\mathbb{N}$, $g_1, g_2, \ldots, g_k$ tutte $\mathbb{N}^n\rightarrow\mathbb{N}$, allora la funzione $h:\mathbb{N}^n\rightarrow\mathbb{N}$ tale che $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)=f(g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ è ottenuta dalle k+1 funzioni mediante composizione

Operazioni su Funzioni (2)

- Operazione di ricorsione
  - Date le 2 funzioni $f:\mathbb{N}^n\rightarrow\mathbb{N}$, e $g:\mathbb{N}^{n+2}\rightarrow\mathbb{N}$, allora la funzione $h:\mathbb{N}^{n+1}\rightarrow\mathbb{N}$ tale che

$$\begin{cases} h(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ h(x_1, x_2, \ldots, x_n, succ(y))=g(x_1, x_2, \ldots, x_n, succ(y), h(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)) \end{cases}$$

è ottenuta dalle k+1 funzioni mediante ricorsione

Funzioni Primitive Ricorsive

- Una funzione è primitiva ricorsiva se è ottenuta applicando un numero finito di volte la composizione e la ricorsione a una o più funzioni base
- Tutte le funzioni primitive ricorsive sono calcolabili
- Esistono funzioni calcolabili che non sono ricorsive primitive
  - Ad es. funzione di Ackermann

Operatore di Minimalizzazione (1)

- L'operatore di minimalizzazione μ permette di trovare il più piccolo elemento di un insieme che soddisfa una data condizione
- Ad es, data la relazione R $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$, allora l'espressione $\mu\, yR(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ permette di individuare il più piccolo tra tutti gli y che soddisfa la R

Operatore di Minimalizzazione (2)

- Formalmente:
- Data la funzione $f:\mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$, allora la funzione $g:\mathbb{N}^{n} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu\, y(f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)=0)$ è ottenuta dalla funzione f mediante minimalizzazione

Funzioni Ricorsive Generali

- Una funzione è ricorsiva generale se è ottenuta applicando un numero finito di volte la composizione, la ricorsione e la minimalizzazione a una o più funzioni base
- La classe delle funzioni ricorsive generali è la più piccola classe di funzioni aritmetiche contenente le funzioni base e chiusa rispetto agli operatori di composizione, ricorsione e minimalizzazione

Computabilità delle Funzioni Ricorsive Generali

- Sono T-computabili tutte e sole le funzioni ricorsive generali