Rappresentazione Algebrica delle Reti di Petri

Generalità

- È una variante rappresentativa delle PN, basata su matrici e equazioni di stato
- Particolarmente utile per
  - analisi di proprietà
  - Validazione
- Queste dispense sono una rielaborazione a cura del docente della omonima tesina presentata da Giuseppe Fatiguso nell'a.a. 2013-14

Ri-definizione di PN (1)

- Al fine di dare una descrizione algebrica delle PN, è opportuno definire una PN in modo alternativo
- Una PN è una 4-pla PN=<P, T, F, W>, dove
  - P è l'insieme finito e non vuoto dei place
  - T è l'insieme finito e non vuoto delle transition
  - F $\subseteq$ (PXT) $\cup$ (TXP) è la relazione di flusso della PN
  - W : (PXT) $\cup$ (TXP) $\rightarrow \mathbb{N}$ è la funziona che associa un peso a ogni arco della PN

Ri-definizione di PN (2)

- Il peso associato a ogni arco è definito dalla relazione
  - W(x, y)>0 sse (x, y) $\in$ F
  - W(x, y) = 0 altrimenti
- Una marcatura M di una PN è una funzione M: P $\rightarrow \mathbb{N}$, dove, $\forall$ p$\in$P:
  - M(p) indica il numero di token in p
  - p è marcato sse M(p)>0
  - M_0 è la marcatura iniziale

Esecuzione di una PN

- Le definizioni di preset / postset di una transizione sono analoghe a quelle già presentate
- La definizione di esecuzione di una PN è analoga a quella già presentata

Ulteriori Elementi Notazionali (1)

- n=|P| è il numero di place della PN
- m=|T| è il numero di transition
- $D^+ \in \mathbb{N}^{(nXm)}$ è la matrice di incidenza dei postset
  - $D^+(p, t) = W(t, p)$
- $D^- \in \mathbb{N}^{(nXm)}$ è la matrice di incidenza dei preset
  - $D^-(p, t) = W(p, t)$

Ulteriori Elementi Notazionali (2)

- $C \in \mathbb{Z}^{(nXM)}$ è la matrice di incidenza della PN, dove
  - $C= D^+ - D^-$, cioè
  - $C(p, t) = W(t, p) – W(p, t)$
- La marcatura è quindi definita come un vettore $M_k \in \mathbb{N}^{(nX1)}$
- Le transizioni attivabili da una marcatura M_k sono rappresentate dal vettore
  - $e_t \in \{0, 1\}^{(mX1)}$

Reti di Petri Pure (1)

- Una PN è pura sse non contiene self-loop, cioè il grafo che la rappresenta
  - non contiene alcun place con arco entrante e uscente dalla stessa transition
  - non contiene alcuna transition con arco entrante e uscente dallo stesso place

Reti di Petri Pure (2)

- Una PN non pura può essere resa pura attraverso modifica strutturale
- È possibile dare rappresentazioni algebriche solo di PN pure

Attivazione Transizioni e Equazioni di Stato (1)

- Una transizione t_i è attivabile alla marcatura M_k sse
  - $M_k[t_i> \Leftrightarrow M_k \geq D^-(\cdot, t_i)$ (Eq Stato 0)
- Se la marcatura M_{k+1} è raggiungibile dalla marcatura M_k attraverso l'attivazione della transizione t_i, allora
  - $M_k[t_i>M_{k+1} \Leftrightarrow M_{k+1} = M_k + D^+(\cdot, t_i) – D^-(\cdot, t_i) = M_k + C(\cdot, t_i)$ (Eq Stato 1)

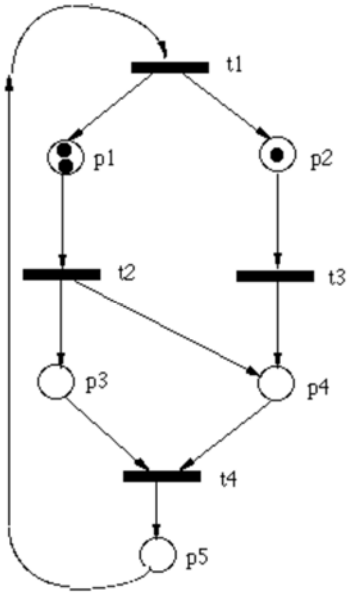
Attivazione Transizioni e Equazioni di Stato (2)

- L'equazione di stato 0 assume solo una forma vettoriale
- L'equazione di stato 1 assume una forma matriciale
- Nell'ipotesi di purezza, l'equazione di stato 1 permette di verificare la raggiungibilità di una marcatura:
  - $M_k[t_i>M_{k+1} \Leftrightarrow M_{k+1} = M_k + C \cdot e_{t_j} \geq 0$ (Eq Stato 2)

Sequenza di Attivazione delle Transizioni

- È definita come il vettore σ:
  - $\sigma = e_{t_1} + e_{t_2} + \ldots + e_{t_j}$
- L'equazione di stato 2 può quindi essere generalizzata in
  - $M_k[t_i>M_{k+1} \Rightarrow M_{k+1} = M_0 + C \cdot \sigma \geq 0$ (Eq Stato 3)
- La precedente è detta equazione fondamentale di una PN
- σ è detto vettore di conteggio delle attivazioni

Esempio: Notazione Grafica



Esempio: Notazione Algebrica

- $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$
- $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$
- $M_0 = (2, 1, 0, 0, 0)$
- $D^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $D^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $C = D^+ - D^- = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Espressione Algebrica delle Proprietà (1)

- **Reachability:**
  - M_k è raggiungibile da $M_0 \Leftrightarrow \exists \sigma : M_0[\sigma> M_k$
- **Boundedness:**
  - k-bound $\Leftrightarrow \forall M$ raggiungibile da M_0 si ha che $\forall p \in P\ M(p) \leq k$
- **Conservativeness:**
  - $\forall M$ raggiungibile da M_0 $\Sigma_{p \in P} M_0(p) = \Sigma_{p \in P} M(p)$

Espressione Algebrica delle Proprietà (2)

- Liveness:
  - $t_j \in T$ gode di liveness $\Leftrightarrow \exists \sigma$: $M_0[\sigma> M_k$;
- Reversibility:
  - PN reversible $\Leftrightarrow \forall M_k$ si ha che $M_0[\sigma_i> M_k$ e $M_k[\sigma_j> M_0$