

La Macchina di Turing

Sommario

- Codifica dei dati
- Macchina Astratta
- Definizioni
- Esempi

Codifica dei dati

- È possibile introdurre la teoria della computabilità facendo riferimento ad algoritmi che elaborano **numeri naturali**
- **Non è una limitazione**, nonostante l'informatica tratti algoritmi relativi a dati di varia natura (testi, immagini, suoni, video, ...)
- Non si ha perdita di generalità in quanto è possibile codificare algebricamente qualsiasi tipo di dato in un numero naturale

Macchina Astratta (1)

- La Macchina di Turing (TM) è una **macchina astratta**: non corrisponde ad alcuna macchina reale
 - Originariamente chiamata Logical Computing Machine - LCM
- Non si considerano quei vincoli che intervengono nella realizzazione di macchine da calcolo reali
 - Dimensione memoria
 - Tempo di calcolo
 - ...

Macchina Astratta (2)

- È definita indipendentemente dalla sua realizzazione fisica
- Definisce esclusivamente relazioni funzionali tra le sue parti

Macchina Astratta (3)

- Storicamente introdotta da Alan Turing per indagare il **problema della decisione** (**Entscheidungsproblem**) posto da David Hilbert:
 - Esiste una procedura **formale** per decidere se una data **affermazione matematica** è vera?
- La TM nasce quindi uno **strumento matematico concettuale**, per studiare problemi di natura matematica
 - e con elevato impatto sulla filosofia del XX e XXI secolo

Verso la Definizione (1)

- Un calcolo svolto da un umano consiste nell'operare su un insieme di simboli scritti su un **opportuno supporto**
 - È **inessenziale** che il supporto sia bidimensionale, ma deve essere **sufficientemente grande**, e tale che in una posizione si possa scrivere un solo simbolo
- I simboli devono appartenere a un prefissato alfabeto

Verso la Definizione (2)

- Un umano, per svolgere un calcolo, effettua una successione di **operazioni elementari**
 - Ogni operazione svolta per il calcolo dipende dalle **operazioni precedenti** e dai **simboli letti**
 - Ogni operazione svolta determina un **cambiamento dello stato mentale** di chi la svolge
- Un umano, mentre svolge un calcolo, ricorda solo un numero finito di simboli letti dal supporto
 - Quando necessario **cerca** le informazioni sul supporto, focalizzando l'attenzione sui simboli a **sinistra o a destra** della posizione corrente

Verso la Definizione (3)

- Il calcolo ha fine quando giunti a un certo punto **non è possibile svolgere più alcuna operazione**
 - Il risultato potrebbe anche non essere ottenuto
- Un calcolo è svolto utilizzando un **insieme di dati di input**, che l'umano riceve dall'esterno
 - per semplicità supponiamo noto l'input **all'inizio del calcolo**

Macchina di Turing: Struttura (1)

- È un apparato costituito da:
 - un **nastro** monodimensionale, di lunghezza infinita, suddiviso in celle, ognuna delle quali può essere vuota oppure contenere un solo simbolo
 - una **testina di lettura/scrittura** dei simboli dalle/sulle celle
 - La testina oltre a leggere/scrivere, si può **spostare** di una cella a sinistra, a destra, oppure può restare ferma

Macchina di Turing: Struttura (2)

- Sul nastro sono scritti i **simboli manipolati** dalla TM
 - Appartengono ad un alfabeto Σ

Macchina di Turing: Funzionamento (1)

- In ogni fase del calcolo, la testina è posizionata su una cella del nastro, contenente un simbolo $s_i \in \Sigma$
- La TM può svolgere una **operazione atomica**:
 - leggere il simbolo contenuto della cella
 - scrivere un simbolo (eventualmente vuoto) nella cella
 - spostare la testina di un passo (a sinistra o a destra)
 - lasciare la testina ferma

Macchina di Turing: Funzionamento (2)

- La successione degli eventi precedenti determina in ogni istante **uno e un solo** (TM **deterministica**) **stato** della TM
 - siano q_1, q_2, \dots, q_n i possibili stati (**finiti**) di una TM
- La **configurazione** di una TM in un dato istante è la coppia ordinata definita dallo stato corrente q_i e dal simbolo s_j puntato dalla testina $C = \langle q_i, s_j \rangle$

Macchina di Turing: Funzionamento (3)

- Ogni TM è **programmata** per eseguire uno specifico calcolo
 - cioè dispone delle **istruzioni** per eseguire quell'unico compito
- Le istruzioni hanno la forma:
 $\langle \text{configurazione} \rangle \rightarrow \langle \text{operazione atomica} \rangle$
- Ogni istruzione specifica l'istruzione atomica che deve essere svolta quando la TM si trova in una data configurazione

Macchina di Turing: Funzionamento (4)

- Le istruzioni di una TM sono registrate in una **matrice funzionale** che associa a ogni configurazione **una e una sola** operazione atomica
- Affinché il calcolo **termini** è necessario che ad almeno una configurazione possibile non corrisponda alcuna istruzione
 - Queste configurazioni sono dette **finali**

Macchina di Turing: I/O

- I dati su cui opera una TM sono forniti in input scrivendoli sul nastro dall'esterno prima dell'inizio del calcolo
- L'output è ciò che è scritto sul nastro alla fine del calcolo

Definizione Formale

- Una TM è una 7-pla $TM = \langle Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, B, F \rangle$
 - Q insieme finito e non vuoto di **stati**
 - Σ **alfabeto della macchina**
 - Δ **alfabeto di input**
 - δ **funzione di transizione**

$$\delta : (Q \times \Sigma) \rightarrow (Q \times \Sigma \times \{L, R, S\})$$
 (con L spostamento a sinistra, R a destra, S stop)
 - $q_0 \in Q$ stato iniziale
 - B spazio vuoto (blank) = $\Sigma \setminus \Delta$
 - $F \subseteq Q$ insieme degli stati finali

Esempio successore (1)

- Calcolo del successore di un numero
- Prima di definire la opportuna TM è necessario analizzare il problema, e “**idearne**” una soluzione
 - Esaminare l’ultima cifra della stringa di input
 - Se è < 9, allora sommare 1 e stop
 - Altrimenti sostituire l’ultima cifra con 0 ed esaminare la precedente
 - Ripetere il passo precedente

Esempio successore (2)

- Sia $\Delta = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$; $\Sigma = \Delta \cup B$
- Ci sono due stati:
 - q_0 : deve essere aggiunto 1 – stato iniziale
 - q_1 : è stato aggiunto 1 – stato finale
- La matrice funzionale è:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	B
q_0	$1q_1D$	$2q_1D$	$3q_1D$	$4q_1D$	$5q_1D$	$6q_1D$	$7q_1D$	$8q_1D$	$9q_1D$	$0q_0S$	$1q_1D$
q_1											

Tesi di Turing

- Una Logical Computing Machine può eseguire qualunque calcolo che può essere descritto come puramente meccanico
 - Tutto ciò che è calcolabile, è calcolabile attraverso una LCM (MdT)