Insiemi, Numerabilità e Calcolabilità

Sommario

- Riepilogo sugli insiemi
- Insiemi numerabili e insiemi più che numerabili
- Incalcolabilità della calcolabilità
- Insiemi effettivamente numerabili
- Funzioni parziali e calcolabilità

Equipotenza e Cardinalità

- L'insieme A è equipotente all'insieme B sse esiste una funzione biiettiva f:A→B
- Due insiemi equipotenti hanno la stessa cardinalità
  - Card(A)= Card(B)
- Se A è equipotente a un sottoinsieme di B, allora Card(A)≤Card(B)

Insiemi Finiti

- Un insieme è finito se ha n elementi, con n finito
  - Card(A)=n
- Se Card(A)= n non esiste alcuna funzione biiettiva tra A e una sua parte propria
  - (parte propria = sottoinsieme di A diverso da A stesso)

Insiemi Infiniti

- Se un insieme A ha un numero infinito di elementi, allora è infinito
- Per ogni insieme infinito A esiste (almeno) una funzione biiettiva tra A e una sua parte propria

Numerabilità

- Un insieme A è numerabile sse può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$
- Se A è numerabile, Card (A) = Card ($\mathbb{N}$) = $\aleph_0$

Numerabilità: Esempi (1)

- $\mathbb{N}$ e i suoi sottoinsiemi seguenti:
  - L'insieme dei numeri pari
    - 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, …
  - L'insieme dei numeri dispari
    - 1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 15, 17, 19, 21, …
  - L'insieme dei numeri primi
    - 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, …
  - L'insieme delle potenze di 2
    - 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, …
- In generale: un sottoinsieme infinito di un insieme numerabile è numerabile

Numerabilità: Esempi (2)

- $\mathbb{Z}$ è numerabile
  - 0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, …
- La successione infinita A_0, A_1, A_2, A_3, … di insiemi numerabili (senza ripetizioni) è numerabile

A_0	$a_{0,0}$	$a_{0,1}$	$a_{0,2}$	$a_{0,3}$	$a_{0,4}$	…
A_1	$a_{1,0}$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	…
A_2	$a_{2,0}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	…
A_3	$a_{3,0}$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	…
…	…	…	…	…	…	…

Numerabilità: Esempi (3)

- L'insieme di tutte le successioni infinite di 0 e 1, t.c. da un certo punto in poi sono tutti 0 è numerabile
- …

Insiemi più che Numerabili

- Esistono insiemi che non possono essere messi in relazione biunivoca con $\mathbb{N}$
- Sono gli insiemi più che numerabili
- Ad es.
  - l'insieme G di tutte le successioni di 0 e 1
  - $\mathbb{R}$
  - …

Numerabilità delle Funzioni Calcolabili (1)

- Una funzione è calcolabile sse esiste un algoritmo che ne calcola i valori
  - Quella funzione è calcolata da più di un algoritmo
- Se FC è l'insieme delle funzioni calcolabili, allora Card(FC) $\leq$ Card (Alg), dove Alg è l'insieme degli algoritmi

Numerabilità delle Funzioni Calcolabili (2)

- Un $a \in$ Alg è una successione di istruzioni in un linguaggio L, generato da un alfabeto finito
  - È una successione di stringhe di L
- L'insieme delle stringhe generate da un L finito è un insieme finito oppure numerabile
- Quindi Alg è al più numerabile, quindi FC è al più numerabile
- Ma l'insieme delle funzioni aritmetiche è più che numerabile, quindi esistono funzioni aritmetiche che non appartengono a FC