

Funzioni Ricorsive

Sommario

- Scopo
- Funzioni ricorsive primitive
- Funzioni ricorsive generali

Scopo

- Individuare un insieme di funzioni calcolabili particolarmente “semplici”: **funzioni base**
- Individuare operazioni su funzioni che **conservano** la calcolabilità
- Creare nuove funzioni ottenute a partire da quelle base applicando le operazioni
 - Le nuove funzioni ottenute sono calcolabili

Ricorsione

- Definire una funzione stabilendone un valore per un argomento iniziale (**base della ricorsione**)
- Supponendo noto il valore della funzione per l'argomento n , definire il valore della funzione per l'argomento $\text{succ}(n)$ (**passo della ricorsione**)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0)=k \\ f(\text{succ}(n))= g(n, f(n)) \end{array} \right.$$

Funzioni Base

- Funzione zero $Z:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ tale che $\forall x Z(x)=0$
- Funzione successore $\text{succ}:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ tale che $\forall x \text{succ}(x)=x+1$
- Funzioni proiezione $P_i^n:\mathbb{N}^n\rightarrow\mathbb{N}$ tali che $P_i^n(x_1, x_2, \dots, x_n)=x_i$, con $n>1$ e $1\leq i\leq n$

Operazioni su Funzioni (1)

- Operazione di composizione
 - Date le $k+1$ funzioni $f:\mathbb{N}^k\rightarrow\mathbb{N}$, g_1, g_2, \dots, g_k tutte $\mathbb{N}^n\rightarrow\mathbb{N}$, allora la funzione $h:\mathbb{N}^n\rightarrow\mathbb{N}$ tale che $h(x_1, x_2, \dots, x_n)=f(g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, x_2, \dots, x_n))$ è ottenuta dalle $k+1$ funzioni mediante **composizione**

Operazioni su Funzioni (2)

- Operazione di ricorsione
 - Date le 2 funzioni $f:\mathbb{N}^n\rightarrow\mathbb{N}$, e $g:\mathbb{N}^{n+2}\rightarrow\mathbb{N}$, allora la funzione $h:\mathbb{N}^{n+1}\rightarrow\mathbb{N}$ tale che
$$\left\{ \begin{array}{l} h(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)=f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ h(x_1, x_2, \dots, x_n, \text{succ}(y))=g(x_1, x_2, \dots, x_n, \text{succ}(y), h(x_1, x_2, \dots, x_n, y)) \end{array} \right.$$
 - è ottenuta dalle $k+1$ funzioni mediante **ricorsione**

Funzioni Primitive Ricorsive

- Una funzione è **primitiva ricorsiva** se è ottenuta applicando un numero finito di volte la composizione e la ricorsione a una o più funzioni base
- Tutte le funzioni primitive ricorsive sono calcolabili
- Esistono funzioni calcolabili che non sono ricorsive primitive
 - Ad es. funzione di Ackermann

Operatore di Minimalizzazione (1)

- L'operatore di minimalizzazione μ permette di trovare il più piccolo elemento di un insieme che soddisfa una data condizione
- Ad es, data la relazione $R(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$, allora l'espressione $\mu y R(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ permette di individuare il più piccolo tra tutti gli y che soddisfa la R

Operatore di Minimalizzazione (2)

- Formalmente:
- Data la funzione $f: \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$, allora la funzione $g: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mu y (f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0)$ è ottenuta dalla funzione f mediante minimalizzazione

Funzioni Ricorsive Generali

- Una funzione è **ricorsiva generale** se è ottenuta applicando un numero finito di volte la composizione, la ricorsione e la minimalizzazione a una o più funzioni base
- La classe delle funzioni ricorsive generali è la più piccola classe di funzioni aritmetiche contenente le funzioni base e chiusa rispetto agli operatori di composizione, ricorsione e minimalizzazione

Computabilità delle Funzioni Ricorsive Generali

- Sono T-computabili tutte e sole le funzioni ricorsive generali