Fondamenti di Informatica

Prof. V.L. Plantamura

Informatica e Comunicazione Digitale

a.a. 2006-2007

Cosa è l'informazione

- L'informazione è qualcosa che si possiede e si può dare ad un altro senza perderne il possesso.
  - L'Informazione non attesa non può essere ricevuta
  - Essa richiede una incertezza da parte di colui che la riceve
  - Non deve essere Ambigua

A cosa serve

Per risolvere una incertezza

Per prendere decisioni

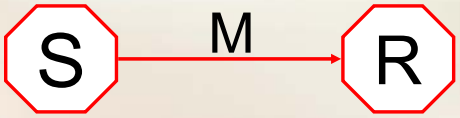
Per risolvere problemi

Condizioni necessarie

- Sorgente e Ricevente hanno un codice in comune
- L'incertezza del Ricevente è tra un numero ben definito di possibilità

Messaggio

- Il Sorgente [S] produce un Messaggio [M]
- Il Messaggio modifica lo stato del Ricevente [R]



Definizione di *Informazione*

- **Livello semantico:** il significato
- **Livello sintattico:** la forma o struttura
- **Livello pragmatico:** reazione del ricevente

Struttura dell'informazione

- La struttura delle informazioni influisce sui tempi di accesso alle informazioni stesse
- La struttura delle informazioni nasconde l'informazione rispetto ad accessi diversi da quelli per cui la struttura è stata creata

Codice

- Numero o sigla alfanumerica sostituente, allo scopo di facilitare il trattamento delle informazioni, la descrizione di cose, persone e situazioni.

  (*Voc. Zanichelli*)

- In senso informatico è una regola per far corrispondere dei nomi (i dati) a degli oggetti (le informazioni)

Definizione di Shannon

- L'informazione è tutto ciò che può consentire di ridurre il nostro grado di incertezza su un evento che si può verificare

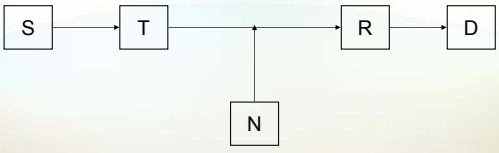
Processo comunicativo

- È composto da cinque parti:
  - Un **mittente**: che produce un messaggio da comunicare ad un'altra entità
  - Un **trasmettitore**: che codifica il messaggio in modo che possa viaggiare su un canale di comunicazione
  - Un **canale di comunicazione**
  - Un **ricevitore**: che riceve ciò che viaggia sul canale e lo decodifica per riconoscere il messaggio
  - Un **destinatario**: al quale giunge un messaggio

Ipotesi di Shannon

- La trasmissione dei simboli lungo il canale costituisce un fenomeno discreto
  - Ovvero, l'invio di ciascun simbolo richiede una certa quantità di tempo, finita e non nulla
- Esiste una sorgente di rumore
  - Agisce sul canale modificando il contenuto sintattico dell'informazione, la sua forma

Processo comunicativo di Shannon



S = Sorgente; T = Trasmettitore; R = Ricevitore;
D = Destinatario; N = Sorgente di Rumore

Problemi da affrontare

- Come misurare la quantità di informazione che viaggia lungo il canale?
- Come garantire trasmissioni sicure?
- Come garantire trasmissioni affidabili?

Definizione di Entropia

- L'entropia è la misura del disordine di un sistema
- Più ordinato o strutturato è un sistema minore è l'entropia e viceversa

Concetto di Incertezza

- Più grande è la nostra incertezza su ciò che dovrà contenere un messaggio, e maggiore sarà l'informazione che riceveremo quando il messaggio sarà arrivato

Misura dell'informazione

- È dunque logico fondare la misura dell'informazione associata ad un messaggio sulla **probabilità** che il messaggio stesso si verifichi

Misura dell'informazione

- Supponiamo che la sorgente emetta simboli discreti ciascuno dei quali si suppone abbia la stessa durata degli altri

$$H = -\log P$$

  - H indica la misura dell'informazione
  - P è la probabilità del simbolo
  - Il logaritmo è in una base che determina l'unità di misura dell'informazione

$$H = -\log_2 P \quad bit$$

Informazione media di più simboli

- Si consideri una sorgente avente i tre simboli A, B e C, che vengono emessi con probabilità *P(A)*, *P(B)* e *P(C)*
- L'informazione associata ad A è:

$$-\log_2 P(A) \quad bit$$

per A che viene emesso per circa *P(A)-esimi* di tempo

Informazione media

- L'informazione per B e C è:

$$-\log_2 P(B) \quad bit$$

$$-\log_2 P(C) \quad bit$$

- L'informazione media *H* è:

$$H = -P(A)\log_2 P(A) - P(B)\log_2 P(B) - P(C)\log_2 P(C) \quad bit/simbolo$$

Fondamenti di Informatica

Prof.ssa Enrica Gentile

Informatica e Comunicazione Digitale

a.a. 2006-2007

Entropia della sorgente

- Per una sorgente *x*, con *m* simboli, se l'i-esimo simbolo ha una probabilità *P(i)*

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{m} P(i)\log P(i) \quad bit/simbolo$$

H prende il nome di

entropia della sorgente

Proprietà 1

- Se tutte le *P(i)*, una sola esclusa, sono nulle, allora *H(x)=0*

  non essendovi incertezza sul risultato, non v'è neppure informazione

Proprietà 2

- Se tutte le *P(i)* sono uguali $\left(P(i) = \frac{1}{m} \right)$

allora *H(x)* è massima:

$$H(x) = -\sum_{1=1}^{m} \frac{1}{m} \log \frac{1}{m} = \log m$$

Proprietà 3 – Entropia congiunta

- Siano in gioco due simboli, x e y, con m possibilità per x e n per y
- Se P(i,j) è la probabilità congiunta dell'emissione dell'i-esimo simbolo di x e dell'j-esimo simbolo di y, allora l'entropia della sorgente doppia è definita da:

$$H(x,y) = -\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P(i,j) \log P(i,j)$$

Indipendenza dei simboli

- La relazione precedente include le sorgenti discrete in cui i simboli non sono indipendenti
- Esiste una effettiva interdipendenza fra i simboli, la cui influenza può essere introdotta nell'entropia

Probabilità condizionale

- Siano *x* e *y* due gruppi di simboli come nella proprietà 3
- Per ogni valore *i* che *x* può assumere esiste una probabilità condizionale *P(j|i)* che *y* valga *j*

Entropia Condizionale

- L'entropia condizionale di y sotto la condizione che lo preceda x è:

$$H(y \mid x) = -\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P(i,j) \log P(j \mid i)$$

Probabilità congiunte e condizionali

- Le probabilità congiunte sono legate a quelle condizionali dalla relazione:

$$P(i,j) = P(i)P(j \mid i)$$

- Sostituendo questa relazione in quella definita nella proprietà 3 si ha:

$$H(x,y) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P(i)P(j \mid i)\log P(i)P(j \mid i)$$

ossia…

$$H(x,y) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P(i)P(j \mid i)\log P(i) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P(i,j)\log P(j \mid i)$$

Se i è costante:

$$\sum_{j=1}^{n} P(i)P(j \mid i)\log P(i) = P(i)\log P(i)$$

e quindi:

$$H(x,y) = -\sum_{i=1}^{m} P(i)\log P(i) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P(i,j)\log P(j \mid i)$$

Entropia Congiunta

- Il primo termine non è altro che *H(x)*, mentre il secondo termine è *H(y|x)*

$$H(x,y) = H(x) + H(y \mid x)$$

- Se i simboli sono indipendenti allora:

$$H(x,y) = H(x) + H(y)$$

Entropia Congiunta

- Se due sorgenti producono una successione di simboli che non hanno relazioni o legami fra loro, allora l'entropia congiunta di una coppia di simboli qualsiasi è data dalla somma delle entropie relative ai due simboli

Esempio 1

- Si consideri il lancio di una moneta
- Sia all'uscita testa che croce è associata una informazione pari a: $-\log\frac{1}{2}=1bit$
- L'informazione media o entropia è:

$$H=-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}=1bit/simbolo$$

Esempio 2

- Consideriamo una sorgente con 6 simboli A, B, C, D, E, F le cui probabilità sono:

$$P(A)=1/2 \qquad P(D)=1/16$$
$$P(B)=1/4 \qquad P(E)=1/32$$
$$P(C)=1/8 \qquad P(F)=1/32$$

L'informazione media

$$H = -\left(\begin{array}{l} \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} + \\ \frac{1}{16}\log\frac{1}{16} + \frac{1}{32}\log\frac{1}{32} + \frac{1}{32}\log\frac{1}{32} \end{array} \right) = 1\frac{15}{16}\ bit/simbolo$$

Entropia in bit al secondo

- L'entropia espressa in bit per simbolo è indicata con *H*
- L'entropia misurata in bit/secondo è indicata con *H'*
- Se *s* è il tasso di invio dei simboli (numero di bit trasmessi in un secondo) allora: *H'=sH*

Esempio 3

P(i)

i	P(i)
A	9/27
B	16/27
C	2/27

P(j|i)

i|i	A	B	C
A	0	4/5	1/5
B	1/2	1/2	0
C	1/2	2/5	1/10

P(i,j)=P(i)P(j|i)

i|i	A	B	C
A	0	4/15	1/15
B	8/27	8/27	0
C	1/27	4/135	1/135

Ridondanza

- È evide te che la pres nza di una interd pendenza fra i simboli dimi uisce l'entropia della sorge te rispetto ad una che ab ia simboli tutti indip ndenti.
- Una successione di simboli che dipendono gli uni dagli altri si dice **ridondante**
- Misuriamo la ridondanza di una successione di simboli calcolando di quanto è stata ridotta l'entropia
- La ridondanza è quindi definita come:

$$E = 1 - \frac{H(y \mid x)}{H(x)}$$

Canale discreto

- La capacità di trasmettere informazioni in un canale discreto si può misurare mediante il numero di bit per unità di tempo che possono venire trasmessi
- La capacità è quindi:

$$C = \lim_{T \to \infty} \frac{\log N(T)}{T}$$

Dimostrazione di Shannon

- Shannon ha dimostrato che, codificando opportunamente il segnale da trasmettere, la capacità di canale può al massimo uguagliare l'entropia della sorgente *H'*

Teorema

- Siano:
  - ***H*** (bit/simbolo) l'entropia di una sorgente
  - ***C*** (bit/secondo) la capacità di un canale senza rumore;
- È possibile codificare i simboli emessi dalla sorgente in modo da trasmettere in media:

  (C/H)-ε simboli al secondo
- dove ε è un numero positivo arbitrario ($<C/H$).
- Non è possibile trasmettere con velocità superiore a C/H simboli al secondo.

Esempio

- Poniamo a 120 persone la domanda:
  - Sei destro o mancino?
- La risposta sarà D=Destro o M=Mancino e sono equiprobabili e indipendenti:
- Supponiamo che la risposta sia trasmessa nell'ordine giusto in cui è data:
  - DDDMDDMDMDDDMD…
- Non ci basta sapere quanti sono D e quanti M

Esempio

- Supponiamo che, in media, solo il 5% della popolazione è mancina.
- L'informazione media delle risposte è:

$$H = -0{,}95\log 0{,}95 - 0{,}05\log 0{,}05 = 0{,}2864 bit / simbolo$$

- La capacità di canale è 1 bit/sec
- Possiamo ridurre la capacità di canale necessaria se codifichiamo il messaggio
- Pertanto, la capacità di canale si riduce a 0,35 bit/sec

Efficienza di codificazione

- Diciamo efficienza di codificazione il rapporto fra entropia del messaggio originale e la capacità di canale richiesta

$$\eta_c = \frac{H}{C} \times 100\%$$

- Per l'esempio precedente risulta:

$$\eta_c = \frac{0,2864}{0,35} \times 100\% = 84,6\%$$

Canali discreti con rumore

- Consideriamo ora il caso in cui la trasmissione non è perfetta a causa della presenza di rumore nel canale.
- Supponiamo che il disturbo su un simbolo sia indipendente dai simboli precedenti e successivi.

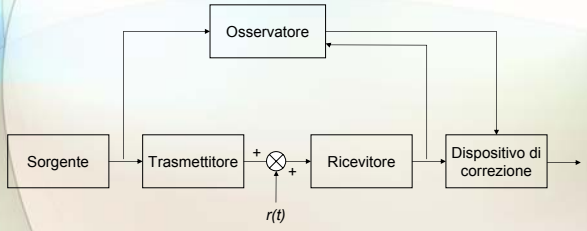
Entropie

- H(x) = entropia della sorgente o d'ingresso del canale
- H(y) = entropia del ricevente o d'uscita del canale
- H(y/x) = entropia dell'uscita, nota l'entrata
- H(x/y) = entropia dell'entrata, nota l'uscita
- H(x,y) = entropia congiunta dell'ingresso e dell'uscita

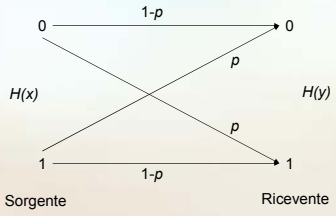
- Relazioni

$$H(x,y) = H(x) + H(y/x)$$
$$H(x,y) = H(y) + H(x/y)$$

Sistema ideale di comunicazioni



Canale binario simmetrico



L'informazione

$$P(nessunerrore) = P(0) = P(\text{è}1)P\left(\frac{1}{1}\right) + P(\text{è}0)P\left(\frac{0}{0}\right)$$

- Ossia: $P(0) = \frac{1}{2}(1-p) + \frac{1}{2}(1-p) = 1-p$
- La probabilità che l'osservatore invii un 1 è:

$$P(errore) = P(1) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p = p$$

- L'entropia del segnale è:

$$-p\log p - (1-p)\log(1-p)$$

Tasso di trasmissione del canale

- Si dimostra che la formula precedente è uguale ed H(x/y)

$$\tau = H'(x) - H'(x/y) bit/\sec$$

- *H(x/y)* viene detto *equivocazione* e rappresenta l'informazione perduta per la presenza di rumore nel canale

Rumore non influente

- Se il rumore nel canale non provoca errori allora si ha:

$$\tau = H'(x) = H'(y) bit/\sec$$

Capacità di un canale discreto

- La capacità di un canale discreto senza rumore era data dal massimo tasso di informazione che il canale permetteva di trasmettere
- La capacità di canale con rumore è definita come il tasso massimo con cui il canale può fornire informazione al ricevitore:

$$C = \max\{H'(x) - H'(x/y)\} bit/\sec$$