COMPLESSITÀ COMPUTAZIONALE DEGLI ALGORITMI

Fondamenti di Informatica a.a.2006/07
Prof. V.L. Plantamura
Dott.ssa A. Angelini

Ricorsività

- Si definisce ricorsiva una procedura P che invoca, direttamente o indirettamente, se stessa.
- Tali procedure sono facili da comprendere e analizzare:
  - La correttezza di un programma ricorsivo si dimostra facilmente con il metodo induttivo;
  - Il calcolo della complessità temporale si riduce alla soluzione di una relazione di ricorrenza.

Fattoriale – Metodo iterativo

- Calcolo del fattoriale di un numero, $n!=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot1$

```
int Fattoriale(int n) {
   int fatt;
   fatt = 1;
   for (i=0; i <= n; i++)
    fatt = fatt * i;
    return(fatt); }
```

Fattoriale – Metodo ricorsivo

```
int Fattoriale(int n) {
  if n=0 then
    return 1;
  else
    return(n * Fattoriale (n-1));
}
```

Fattoriale

- La versione ricorsiva è più concisa ma non offre alcun vantaggio in termini di velocità di esecuzione (cioè di complessità);
- Dimostriamo la correttezza della seconda versione:
  - *Passo base*: l'algoritmo è certamente corretto per n=1, in quanto 1! = 1;
  - *Passo induttivo*: se l'algoritmo calcola correttamente (n-1)!, allora esso calcola correttamente n!, che è dato da n·(n-1)!

Relazione di ricorrenza

- Calcoliamo la complessità della versione ricorsiva:
  - se n=0 **T(n)**=1+1=**2**;
  - se n>0 **T(n)**=1+T(n-1)+1=**T(n-1)+2**;
- Versione non esplicita di T(n);
- Il metodo più semplice per risolvere questa equazione è espanderla fino ad arrivare ad una espressione in funzione di n e costanti.

Relazione di ricorrenza

T(n)=2+T(n-1)=

2+(2+T(n-2))=

…

2+(2+(2+…+(2+T(0))))=

2*n+2 = **O(n)**

- Per relazioni di ricorrenza più complesse, questo metodo è inefficace.

Divide et Impera

- Tecnica di progetto di algoritmi tra le più importanti;
- Consiste nel dividere il problema in sotto problemi di dimensione più piccola, risolvere ricorsivamente tali sottoproblemi, e quindi ottenere dalle soluzioni dei sottoproblemi quella globale.

Divide et Impera

- Fasi:
  1. *Suddivisione del problema*: il problema originale di dimensione n è decomposto in a sottoproblemi di dimensione minore $f_1(n),\ldots,f_a(n)$;
  2. *Soluzione ricorsiva degli a sottoproblemi*;
  3. *Combinazione delle soluzioni.*

Divide et Impera

- A ciascuna fase sono associati dei costi. Indichiamo con:
  - Sudd(n) tempo del punto 1;
  - Fus(n) il tempo del punto 3;
  - $T(f_1(n) + .. + f_a(n))$ il tempo del punto 2.

Divide et Impera

- Equazione del tempo di esecuzione:

$$\begin{cases} T(n) = c, & n<n_0 \\ T(n) = T(f_1(n)) + .. + T(f_a(n)) + Sudd(n) + Fus(n) & n \geq n_0 \end{cases}$$

- Spesso il tempo di suddivisone è irrilevante o assorbito da altri termini;

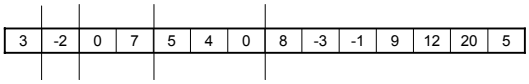
Divide et Impera

- Indichiamo *d(n) = Sudd(n) + Fus(n)* come *funzione guida* della equazione di ricorrenza.

$$\begin{cases} T(n) = c, & n<n_0 \\ T(n) = T(f_1(n)) + .. + T(f_a(n)) + d(n) & n \geq n_0 \end{cases}$$

Esempio - Merge sort

- Risolve il problema di ordinamento di un array;
- Fasi:
  - Divide l'array in due metà;
  - Ordina le due metà con due chiamate ricorsive a se stesso;
  - Combina i due semi-array ordinati in un unico array ordinato.



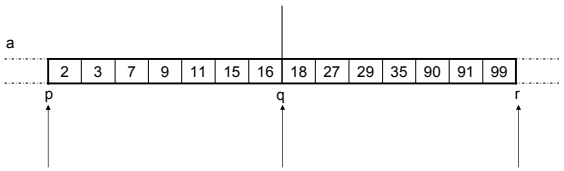
Esempio - Merge sort

```
void mergesort(int* a, int p, int r) {
   int q;
   if (p < r) {  /* ossia se la lunghezza della porzione
                                          maggiore di 1 */
        q = (p+r)/2;
        mergesort(a,p,q); /*ordina la prima porzione */
        mergesort(a,q+1,r); /* ordina la seconda
                              porzione */
        merge(a,p,q,r); /* combina le due porzioni */}
}
```

Esempio - Merge sort

- Per fare ciò l'algoritmo si poggia ad una funzione di merge che serve ad ordinare gli elementi di due porzioni adiacenti già ordinate separatamente.
- La funzione merge prende come argomenti:
  - L'array a
  - La posizione di partenza *p* e l'ultima *q* della prima porzione ordinata
  - L'ultima posizione r della seconda porzione ordinata (che ha come posizione di partenza *q+1*)

Esempio - Merge sort



Esempio - Funzione Merge

```
void merge(int* a, int p, int q, int r) {
   int b[MAX],i,j,k; /* MAX denota la dimensione
                        massima che a può avere. */
   i=p; j=q+1; /* i e j "puntano" all'inizio delle due
                                          porzioni */
   for (k=0; k<(r-p+1); k++) {
       if ((i <= q) && ((j>r) || (a[i]<a[j])))
         b[k]=a[i++];
       else b[k]=a[j++]; }
   for (k=0; k<(r-p+1); k++)
         a[p+k]=b[k];
}
```

Esempio – Complessità Merge

Assegnamenti esterni	2 +
Test I° for	n+1 +
Numero cicli for	n*(
Corpo for	1+1)+
Test II° for	n+1 +
Numero cicli for * corpo	n*1
	5n + 4

Esempio – Complessità Merge sort

- Non è influenzata dalla configurazione dell'input;
- Per semplificare i calcoli supponiamo che la dimensione iniziale dell'array sia una potenza di 2, $n=2^{p;}$
- Scriviamo la relazione di ricorrenza per la T(n):

  n=1 T(n)=1;

  n>1 T(n)=1+1+2T(n/2)+5n+4.

Esempio – Complessità Merge sort

- n=1 T(n)=1

  n>1 T(n)=2T(n/2)+5n+6
- Questa espressione della complessità è in funzione di se stessa.
- Proviamo a risolverla per espansioni successive.
- Troviamo **$T(2^q)=2^q+5*q2^q+6*(2^q-1)$**

Esempio – Complessità Merge sort

- Essendo $q=\log_2 n$:

  T(n)= n + 5nlogn +7n -6= 5nlogn +8n -6
- Il mergesort ha complessità **Θ(nlogn)**

Altro esempio di risoluzione

- Data una formula di ricorrenza, supponiamo sia nota la forma generale della funzione T(n) da determinare. Sarà sufficiente trovare i parametri incogniti.

Altro esempio di risoluzione

$$\begin{cases} T(1) = 7 \\ T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 8 \end{cases}$$

- Si ipotizzi che la soluzione abbia la forma: T(n) = an+b. Occorre determinare a e b, sapendo che:

$$\begin{cases} T(1) = a + b = 7 \\ T(n) = an + b = 2T(\frac{n}{2}) + 8 = \\ \qquad 2(a\frac{n}{2} + b) + 8 = an + 2b + 8 \end{cases}$$

Altro esempio di risoluzione

- Da cui b = -8 e a = 15
- T(n) = 15n - 8

Caso Divide et Impera

- Se indichiamo con a il numero dei sottoproblemi e con n/b la dimensione di ogni sottoproblema, allora il tempo di esecuzione di un algoritmo che segue la tecnica divide et impera ha la seguente equazione di ricorrenza:

$$\begin{cases} T(1) = c \\ T(n) = aT(\frac{n}{b}) + d(n) \end{cases}$$

Con $n=b^k$, $k>0$ e $d(n)$ tempo di divisione e fusione dei sottoproblemi, moltiplicativa.

Teoremi

- Confrontando a con d(b), si dimostra che se:

$$a > d(b) : T(n) = \mathrm{O}(n^{\log_b a})$$
$$a < d(b) : T(n) = \mathrm{O}(n^{\log_b d(b)})$$
$$a = d(b) : T(n) = \mathrm{O}(n^{\log_b d(b)} \log_b n)$$

- Inoltre se $d(n) = n^p$, si ha:

$$a > d(b) : T(n) = \mathrm{O}(n^{\log_b a})$$
$$a < d(b) : T(n) = \mathrm{O}(n^p)$$
$$a = d(b) : T(n) = \mathrm{O}(n^p \log_b n)$$

Esempi

T(1) = c	a	b	d(b)	
$T_1(n) = 2T(n/2)+n$	2	2	2	$O(n\log n)$
$T_2(n) = 4T(n/2)+n$	4	2	2	$O(n^2)$
$T_3(n) = 4T(n/2)+n^2$	4	2	4	$O(n^2\log n)$
$T_4(n) = 4T(n/2)+n^3$	4	2	8	$O(n^3)$