

### Esercizio 2.1

1) Determinare una grammatica che genera il seguente linguaggio:

$$L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$$

e dimostrare questo risultato.

2) Che tipo di grammatica genera  $L$  ?

1)  $G = (X, V, S, P)$

$$X = \{a, b\}, \quad V = \{S\}, \quad P = \left\{ S \xrightarrow{(1)} aSb, S \xrightarrow{(2)} ab \right\}$$

Dobbiamo dimostrare che  $L = L(G)$ .

i)  $L(G) \subset L$

Sia  $w$  una stringa derivabile da  $S$  (in  $G$ ).

$$w \in L(G) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} S \xRightarrow{*} w, \quad w \in X^*$$

Procediamo *per induzione sulla lunghezza della derivazione* di  $w$  da  $S$ . Denoto con  $n$  la lunghezza della derivazione di  $w$  da  $S$ .

#### Passo base

$n = 1$

$S \xrightarrow{(2)} ab$  è l'unica derivazione di lunghezza  $n = 1$  che genera stringhe di soli terminali.

È immediato verificare che  $ab \in L$ .

#### Passo induttivo

Dimostriamo che, per ogni  $n > 1$ , se supponiamo che il seguente enunciato è vero:

$$\begin{aligned} \text{“se } w' \in L(G), S \xrightarrow{n-1} w' \text{ (} w' \text{ è derivabile in } n-1 \text{ passi da } S) \\ \text{allora } w' \in L \text{”} \end{aligned}$$

allora anche l'enunciato:

$$\text{“se } w \in L(G), S \xrightarrow{n} w \text{ allora } w \in L \text{”}$$

risulta vero.

Consideriamo:

$$w \in L(G), \text{ con } S \xrightarrow{n} w.$$

Per definizione (di derivabilità in  $n$  passi), esiste una sequenza di forme di frase  $w_1, w_2, \dots, w_n$  con  $w_n = w$ , tale che  $w_1$  deriva direttamente da  $S$  e, per ogni  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ),  $w_{i+1}$  deriva direttamente da  $w_i$ .

$$S \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n = w$$

È immediato osservare che il primo passo della derivazione è dato dalla applicazione della produzione (1) di  $G$  (altrimenti otterremmo la stringa  $ab$ , priva di nonterminali ed avremmo finito. Ma allora  $n = 1$ ).

Si ha dunque:

$$S \xRightarrow{(1)} aSb \xRightarrow{n-1} w_n = w$$

Per ipotesi di induzione, ogni stringa derivabile da  $S$  in  $n-1$  passi è una parola di  $L$ . Dunque, da  $S$  è possibile derivare in  $n-1$  passi una stringa del tipo:  $w' = a^k b^k$ ,  $k > 0$ .

Più precisamente,  $w' = a^{n-1} b^{n-1}$ , poiché:

$$S \xRightarrow{(1)} a^k S b^k, \quad k > 0.$$

Ma allora la stringa:

$$aw'b = aa^{n-1} b^{n-1} b = a^n b^n$$

è ancora una stringa di  $L$  ed inoltre è derivabile da  $S$  in  $n$  passi.

Si ha, infatti:

$$S \xRightarrow{(1)} aSb \xRightarrow{n-1} aw'b = a^n b^n = w$$

Risulta così dimostrato  $L(G) \subset L$ .

ii)  $L \subset L(G)$

Sia  $w$  una parola di  $L$ . Procediamo *per induzione sulla lunghezza della stringa  $w$* .

#### Passo base

Prendiamo in considerazione la parola di  $L$  di lunghezza minima.

$$n = 1 \Leftrightarrow |w| = 2 \quad w = ab$$

Dobbiamo dimostrare che:  $S \xRightarrow{*} ab$ .

Banale. Applichiamo la produzione (2) di  $G$  ed otteniamo che  $w = ab$  è direttamente derivabile da  $S$ .

$$S \xRightarrow{(2)} ab$$

#### Passo induttivo

Dimostriamo che, per ogni  $n > 1$ , se supponiamo che il seguente enunciato è vero:

$$\text{“se } w' \in L, |w'| = 2(n-1) \text{ allora } S \xRightarrow{*} w' \text{”}$$

allora anche il seguente enunciato:

$$\text{“se } w \in L, |w| = 2n \text{ allora } S \xRightarrow{*} w \text{”}$$

risulta vero.

Sia  $w$  una parola su  $X$  tale che:

$$w \in L, |w| = 2n, n > 1.$$

Ovviamente,  $w = a^n b^n$  (unica parola di  $L$  di lunghezza  $2n$ ). Nella (ipotetica) derivazione di  $w$  da  $S$ , devo necessariamente applicare la produzione (1) di  $G$ , come 1° passo (altrimenti riottenerei la parola  $ab$ ).

Dunque:

$$S \xRightarrow{(1)} aSb \quad (a)$$

Per ipotesi di induzione, ogni parola di  $L$  di lunghezza  $2(n-1)$  è derivabile da  $S$  (in  $G$ ).

Dunque, anche  $w' = a^{n-1} b^{n-1}$  è derivabile da  $S$ :

$$S \xRightarrow{*} w' = a^{n-1} b^{n-1} \quad (b)$$

Ne consegue che  $w = a^n b^n$  è derivabile da  $S$  e la relativa derivazione è ottenuta applicando in successione (a) e (b).

$$S \xRightarrow{(1)} aSb \xRightarrow{*} aw'b = \underbrace{aa^{n-1}}_{(a)} \underbrace{b^{n-1}b}_{(b)} = w$$

Dunque,  $L \subset L(G)$  e

$$L = L(G)$$

2)  $G$  è una grammatica libera da contesto.